Mathématiques

Troisième

Table des matières

1. Le développement

1.1 Les outils

1.1.1 La distributivité simple

Propriété 1.1.1 Pour tout nombres k, a et b :

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

Exercice 1.1 Développer les expressions suivantes :

- $9(2x+3)$
- $-2(-2x+4)$
- $-3(5x-4)+3x-2-2(3x-4)$
- $2x(x+4)$
- $-3x(2x+4)-3x(x+4)$

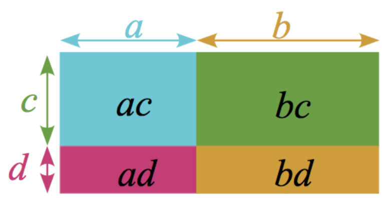
- $3x^2+6x-2x(x^2-5x)$

1.1.2 La double distributivité

Propriété 1.1.2 Pour btous nombres a, b, c et d :

$$(a+b)\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

$$(a+b)\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$$



Exercice 1.2 Développer les expressions suivantes :

- $A = -3(x+4)+(2x-6)(-8x+4)$

- $B = 7(4x-4)-8(-4x-2)$

- $C = (6x-6)(-2x+3)+(6x+2)(-2x-1)$

- $D = -2(6x-1)(2x+3)$

- $E = 6x^2+4x-(4x^2+2x-6)$

1.1.3 Identités remarquables

Propriété 1.1.3 Les identités remarquables sont trois développements particuliers à connaître :

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Exercice 1.3 Retrouver à l'aide de la double distributivité les identités remarquables.

Exercice 1.4 A l'aide des identités remarquables développer les expressions suivantes :

1. $(3x+2)^2$
2. $(2x-3)^2$
3. $(6x-4)(6x+4)$

1.2 Les méthodes

Méthode 1 Tester une égalité pour des valeurs données
On peut tester l'égalité entre deux expressions littérales pour certaines valeurs de x. Pour ce faire il suffit de remplacer x par la valeur souhaitée et calculer la valeur numérique de chacune des expressions puis de les comparer.

Exemple 1.2.1 Soit deux expressions $A = 2x^2 + 2x + 4$ et $B = 4x$. Prouver que A et B sont égales pour $x = 1$ et $x = 2$.

Méthode 2 Prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales pour toutes les valeurs de x

Pour ce faire, il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle les deux expressions ne sont pas égales.

Exemple 1.2.2 Prouver que $A = 2x^2 + 2x + 4$ et $B = 4x$ ne sont pas égales.

Méthode 3 Prouver que deux expressions littérales sont égales.

Pour prouver que deux expressions sont égales, il suffit de prouver qu'elles ont la même écriture developpée réduite.

Exemple 1.2.3 Prouver que les expressions $A = (2x + 3)^2 - 4x^2$ et $B = 3(4x + 3)$ sont égales.

Méthode 4 Utiliser les identités remarquables pour factoriser

Pour le moment, on a utiliser les identités remarquables pour développer des expressions mais on peut les utiliser aussi dans l'autre sens pour factoriser.

$\xrightarrow{\text{Développement}}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$\xleftarrow{\text{Factorisation}}$

Exemple 1.2.4 A l'aide des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 9x^2 + 12x + 4$

2. $B = 4x^2 - 36$

3. $C = 4x^2 - 16x + 16$

2. Proportionnalité et grandeurs composées

2.1 Dans un tableau

Un tableau représente une situation de proportionnalité quand on peut passer des nombres de la première ligne à ceux de la deuxième ligne en les multipliant par un même coefficient. Ce coefficient est appelé coefficient de proportionnalité.

Exercice 2.1 Voici un tableau de proportionnalité.

Durée de location (heure)	2	2,5	y	4	t
Prix (euros)	x	167,5	201	z	469

1. Déterminer les valeurs de x et y avec la méthode du coefficient.

2. Déterminer les valeurs de z et t avec la méthode du produit en croix.

2.2 Manipulation de pourcentage

Dans cette partie, on notera PI le prix initial et PF le prix final.

2.2.1 Réduction

Si on te fait une réduction de $x\%$, il reste $(100-x)\%$ à payer. Le coefficient de cette opération sera donc :

$$Coefficient = \frac{100-x}{100}$$

Exemple 2.2.1 Un commerçant accorde une remise 30% sur un article coutant 120€. Déterminer le prix final.

Si on fait une remise de 30%, il te reste 70% à payer et plus précisément 70% de 120€. 70% étant égal à 0,7 on fait donc :

$$PF = 120 \times 0,7 = 84$$

Le prix final de l'article sera donc 84€.

2.2.2 Augmentation

Si on te fait une augmentation de $x\%$ il te reste $(100+x)\%$ à payer. Le coefficient de cette opération sera donc :

$$Coefficient = \frac{100+x}{100}$$

Exemple 2.2.2 Le montant initial d'un loyer est 820€. Le montant du loyer augmente de 8%, déterminer le nouveau montant du loyer.

Si on augmente le prix de 8%, le nouveau prix représente 108% du prix initial. 108% étant égale à 1,08. On obtient

$$PF = 820 \times 1,08 = 885,60$$

Le montant du nouveau loyer sera de 885,60€

Dans le premier exemple (réduction) le coefficient est 0,7 et dans le second (augmentation) 1,08.

Exercice 2.2 Compléter le tableau suivant :

Opération	**Coefficient**
Augmentation de 15%	
Réduction de 12%	
Augmentation de 8%	
Réduction de 35%	
	1,08
	0,70
	1,33
	0,95

2.2.3 Evolution

Dans le cas de l'évolution d'un prix. On retrouve le coefficient de cette évolution en calculant :

$$Coefficient = \frac{PF}{PI}$$

On peut ainsi grâce à la valeur numérique du coefficient déterminer la nature de l'évolution et le pourcentage de cette évolution.

Exercice 2.3

1. Le prix d'un article passe de 126 € à 146€. Caractériser cette évolution.

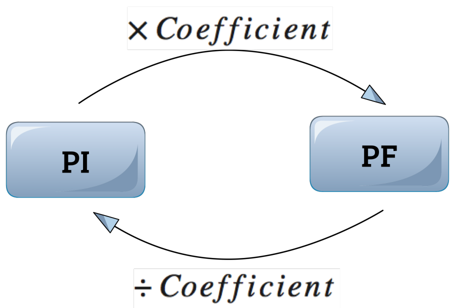
2. Le prix d'un article passe de 12,50 € à 11€. Caractériser cette évolution.

3. Le prix d'un article passe de 85 € à 75€. Caractériser cette évolution.

4. Le prix d'un article passe de 125 € à 146€. Caractériser cette évolution.

2.2.4 Schéma

Vous pouvez utiliser le schéma suivant pour vous faciliter la vie.



Exercice 2.4 Utiliser le schéma afin de répondre aux questions suivantes :

1. Après une augmentation de 20%, le prix d'un article est 85€. Déterminer son prix avant augmentation.

2. Avant les soldes un article coûte 76,50€. Sachant qu'il est soldé à -30%, déterminer son prix soldé.

3. Le prix soldé d'un article est 82,50€. Sachant qu'il est soldé à -25%, déterminer son prix avant les soldes.

4. Après une augementation de 7%, le montant de votre loyer est 720€. Déterminer le montant de votre loyer avant augmentation.

2.3 Les échelles

Définition 2.3.1 — Echelle. Une échelle est définie par le rapport suivant :

$$Echelle = \frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

R Attention aux conversions éventuelles.

Exercice 2.5 Sur un plan dont l'échelle est 1/2500.

1. Déterminer à quelle longueur réelle en mètre correspond une longueur de 15cm sur le plan.

2. Déterminer à quelle longueur, en cm,sur la carte correspond une longueur de 2km.

Exercice 2.6 Sur un plan 5 cm correspond à 1,5km. Déterminer l'échelle de ce plan.

2.4 Grandeurs composées

Certaines grandeurs sont composés de plusieurs grandeurs.

Exercice 2.7 Décrire comment sont composées les grandeurs suivantes :

1. km/h
2. $W.h$
3. m^3
4. L/min

5. m/s

Exercice 2.8 Un cycliste a parcouru 50 km en 100 min.

1. Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

2. A cette vitesse, combien de temps aurait-il mis pour parcourir 45 km ?

Exercice 2.9 Le pont du Gard est la partie la plus connue d'un aqueduc long de 50 km qui amenait l'eau de la Fontaine d'Eure à Uzès (altitude 71,25 m) jusqu'à la rue de la Lampèze à Nîmes (59,95 m). Malgré le faible dénivelé, le débit était de 1 620 m^3/h au moment de la construction.

1. Exprimer ce débit en L/s puis en $m^3/jour$.

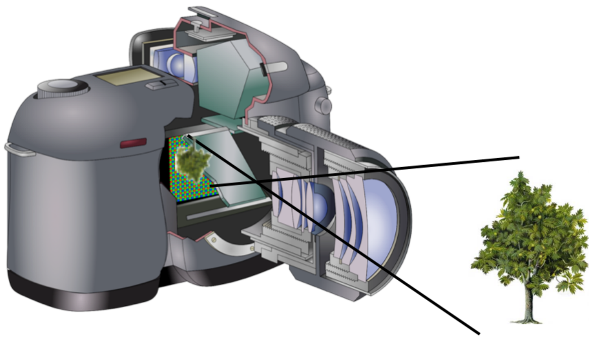
2. L'eau mettait 25 h pour parcourir l'aqueduc. Calculer la vitesse de l'eau en km/h.

3. Combien de temps en minutes et secondes mettait l’eau pour parcourir les 275 m du pont du Gard ?

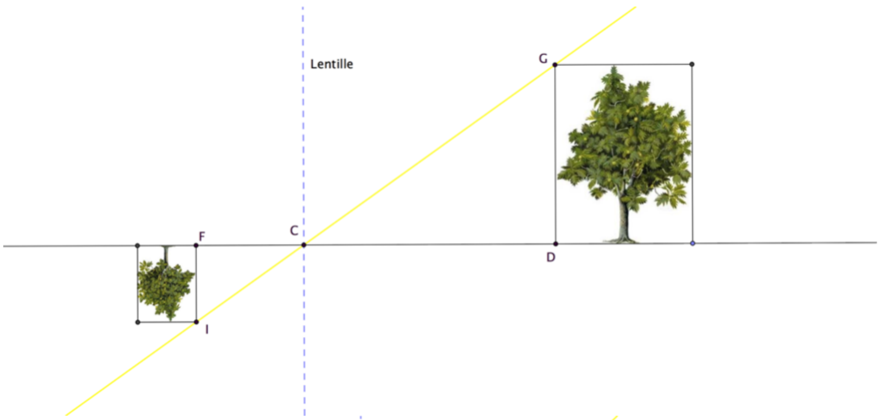
3. Théorème de Thalès

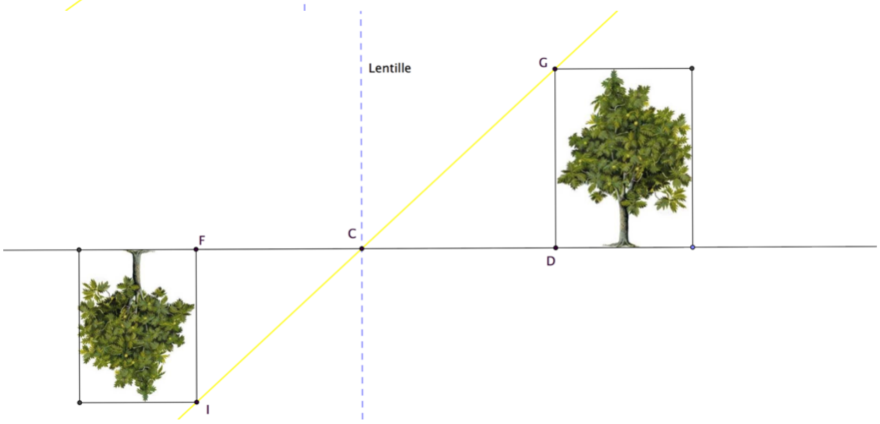
3.1 Découverte

Activité 3.1 Dans un appareil photo, la lumière est focalisée par une lentille. L'image de l'objet est alors capté par un capteur composé de millions de détecteurs, les pixels, qui vont transformer le signal lumineux en signal électrique. Les informations sont rassemblées, codées et enregistrées dans une mémoire sous forme de nombre.



Voici les schémas de deux prises de vue d'un arbre.





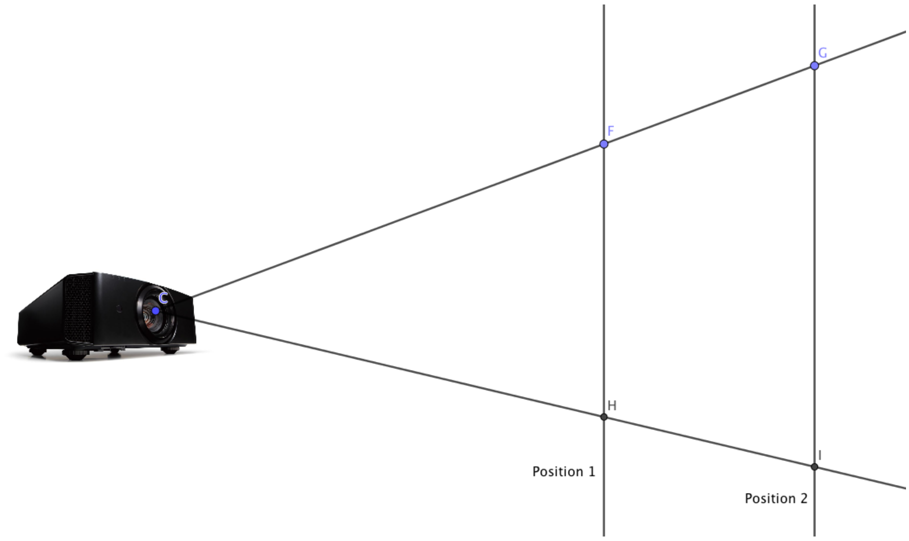
1. Quelles différences pouvez-vous noter entre les deux prises de vue ?

2. A l'aide de mesures effectuées à la règle, déterminer le coefficient de réduction pour les deux prises de vue.

3. Proposer une conjecture entre les triangles CDG et CFI.

4. Vérifier par le calcul votre conjecture.

Activité 3.2 On souhaite projeté un film à l'aide d'un vidéoprojecteur. On positionne l'écran de deux manières différentes.



1. Que représentent les segments $[HF]$ et $[IG]$?

2. A l'aide de mesures effectuées à la règle, déterminer le coefficient d'agrandissement entre les positions 1 et 2.

3. Proposer une conjecture entre les triangles CDG et CFI.

4. Vérifier par le calcul votre conjecture.

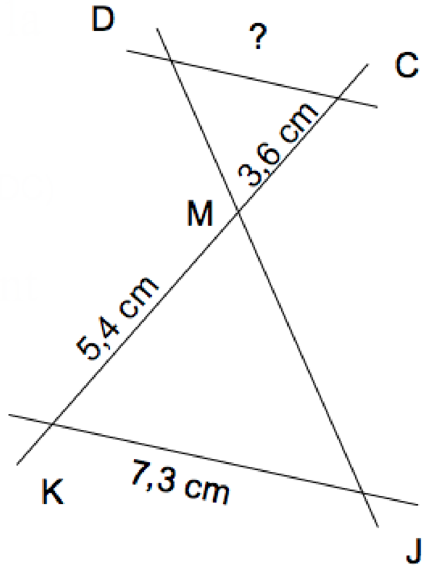
3.2 Théorème de Thalès

Propriété 3.2.1 Soit deux droites (AB) et (AC) sécantes en A ; soit M un point de la droite (AB) ; soit N un point de la droite (AC) . Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les triangles AMN et ABC ont leurs côtés associés proportionnels.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exercice 3.1 Dessiner toutes les configurations de Thalès possibles.

Exercice 3.2 Soit M le point d'intersection des droite (DJ) et (CK). Les droites (DC) et (KJ) sont parallèles.



Déterminer la longueur de $[CD]$.

■

4. Factorisation

4.1 Méthodes de factorisation

En général, il existe deux moyens pour factoriser une expression :
- repérer un facteur commun
- utiliser les identités remarquables

Il est géneralement simple de repérer un facteur commun. C'est pourquoi je recommande de regarder systematiquement si cette méthode vous semble applicable avant d'essayer la deuxième.

4.1.1 Méthode du facteur commun

Méthode 5 — Du facteur commun. Lorsqu'une expression contient dans chaque terme de la somme un facteur commun, on peut alors factoriser en utilisant la propriété :

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$$

Quelques exemples valent mieux qu'un long discours...

Exemple 4.1.1 Voici des exemples

$A(x) = 15x - 12$

$A(x) = \boxed{3} \times 5x - \boxed{3} \times 4$ $\rightsquigarrow$ *Le nombre 3 est le facteur commun.*

$A(x) = \boxed{3}\,(5x - 4)$

$B(x) = 5x - 5$

$B(x) = \boxed{5} \times x - \boxed{5} \times 1$ $\rightsquigarrow$ *Le nombre 5 est le facteur commun : ne pas oublier le "×1" !*

$B(x) = \boxed{5}\,(x - 1)$

$C(x) = 6x^2 + 10x$

$C(x) = \boxed{2x} \times 3x + \boxed{2x} \times 5$ $\rightsquigarrow$ *2x est ici le facteur commun.*

$C(x) = \boxed{2x}\,(3x + 5)$

$D(x) = (3x+2)(4x-1)+(3x+2)(-6x+8)$

$D(x) = \boxed{(3x+2)} \times (4x-1) + \boxed{(3x+2)} \times (-6x+8)$ $\rightsquigarrow$ *c'est ici* $(3x+2)$.

$D(x) = \boxed{(3x+2)}\,[(4x-1)+(-6x+8)]$

$D(x) = \boxed{(3x+2)}\,[4x-1-6x+8]$

$D(x) = \boxed{(3x+2)}\,(-2x+7)$

$E(x) = (3x-4)^2-(2x-5)(3x-4)$

$E(x) = \boxed{(3x-4)} \times (3x-4) + (2x-5) \times \boxed{(3x-4)}$ $\rightsquigarrow$ $(3x-4)$ *est le facteur commun.*

$E(x) = \boxed{(3x-4)}\,[(3x-4) - (2x-5)]$ $\rightsquigarrow$ *Attention aux changements de signes.*

$E(x) = \boxed{(3x-4)}\,[3x-4 - 2x + 5]$

$E(x) = \boxed{(3x-4)}\,(x+1)$

$F(x) = (2x-3)^2-(2x-3)$

$F(x) = \boxed{(2x-3)}\,(2x-3) - \boxed{(2x-3)} \times 1$ $\rightsquigarrow$ *Mettre en évidence le "*$\times 1$*".*

$F(x) = \boxed{(2x-3)}\,[(2x-3)-1]$

$F(x) = \boxed{(2x-3)}\,(2x-4)$

Exercice 4.1 Factoriser les expressions suivantes :

1. $(3x+7)(2x-4)+(3x+7)(4x+2)$

2. $(2x-5)^2-(2x-5)(6x-1)$

3. $6x(x-2)-(x-2)(x-3)$

4. $(15x-5)(2x+9)-(3x-1)(4x-1)$

5. $(3x-7)(3x+7)-(3x-7)(2x+11)$

6. $(2x-4)^2-(x-2)(3x+4)$

Corrigé : Vous pouvez évidemment reprendre cette résolution en ajoutant des étapes si cela vous a paru trop rapide...

1. $(3x+7)(2x-4)+(3x+7)(4x+2) = (3x+7)[(2x-4)+(4x+2)] = (3x+7)(6x-2)$.
2. $(2x-5)^2-(2x-5)(6x-1) = (2x-5)[(2x-5)-(6x-1)] = (2x-5)(2x-5-6x+1) = (2x-5)(-4x-4)$.
3. $6x(x-2)-(x-2)(x-3) = (x-2)(6x-(x-3)) = (x-2)(5x+3)$.
4. Ici, il ne semble pas y avoir de facteur commun. Mais on remarque une relation de proportionnalité entre $15x-5$ et $5x-3$, et :
$(15x-5)(2x+9)-(3x-1)(4x-1) = (5\times 3x-5\times 1)(2x+9)-(3x-1)(4x-1) = 5\times(3x-1)(2x+9)-(3x-1)(4x-1) = (3x-1)[5(2x+9)-(4x-1)] = (3x-1)(10x+45-4x+1) = (3x+1)(6x+46)$.

4.1.2 Méthode des identités remarquables

Méthode 6 — Des identités remarquables. Lorsque l'on ne repère pas un facteur commun, il peut y avoir une identité remarquable :

$$\boxed{a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2}$$

$$\boxed{a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$$

$$\boxed{a^2-b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Il s'agit alors de repérer quelle identité utiliser puis d'identifier a et b pour factoriser en utilisant les formules ci-dessus.

Poursuivons avec quelques exemples :

Exemple 4.1.2 Factorisons les expressions suivantes :

1. $x^2-22x+121$
On reconnaît la deuxième identité remarquable avec $a^2 = x^2$ donc $a = x$ puis $2\times a\times b = 2\times x\times 11$ donc $b = 11$. Il reste alors 121 qui correspond bien à 11^2. Nous pouvons par conséquent écrire :
$$x^2-22x+121 = (x-11)^2$$
2. $36x^2-64$.
Après avoir remarqué que $36x^2$ n'est pas un carré (seul le x est mis au carré), on écrit :
$$36x^2-64 = (6x)^2-8^2 = (6x-8)(6x+8) \text{ en utilisant la troisième identité}$$
3. $9x^2+24x+16 = (3x)^2+2\times 3x\times 4+4^2 = (3x+4)^2$

Ces exemples sont volontairement largement détaillés. Rien ne vous empêchera lors de vos examens de laisser moins d'étapes de calculs (si toutefois vous n'écrivez pas directement le résultat).

Exercice 4.2 Factoriser les expressions suivantes :

1. $A(x) = 9x^2+42x+49$

2. $B(x) = 25x^2 - 60x + 36$

3. $C(x) = 9x^2 - 64$

Corrigé : Voici des éléments de correction

$A(x) = 9x^2 + 42x + 49$
$A(x) = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times (7) + (7)^2$
$A(x) = (3x+7)^2$ — *De la forme* $(a+b)^2$.

$B(x) = 25x^2 - 60x + 36$
$B(x) = (5x)^2 - 2 \times (5x) \times (6) + (6)^2$
$B(x) = (5x-6)^2$ — *De la forme* $(a-b)^2$.

$C(x) = 9x^2 - 64$
$C(x) = (3x)^2 - (8)^2$
$C(x) = (3x-8)(3x+8)$ — *De la forme* $(a-b)(a+b)$.

Et si aucune de ces deux méthodes ne fonctionnent ?

En effet, il arrive (plutôt fréquemment même) de ne pas avoir de facteurs communs, auquel on pourra toujours utiliser une identité remarquable. Ce raisonnement dépasse les exigences de votre prochain examen (brevet des collèges), il me semble que vous disposez de toutes les capacités pour le comprendre.

Exemple 4.1.3 Factorisons l'expression : $x^2 - 12x + 12$. Pas de facteur commun.
Essayons donc d'appliquer une identité remarquable.
On remarque la deuxième identité en posant $a = x$. On obtient alors $2 \times x \times 11 = 2 \times a \times b$ ce qui force l'identification : $b = 11$. Ainsi afin de factoriser il faut avoir $x^2 - 12x + 121$, ce qui n'est pas. Mais nous pouvosn toujours écrire :
$x^2 - 12x + 12 = x^2 - 12x + 121 - 121 + 12 = (x^2 - 12x + 121) - 99 = (x-11)^2 - 99$.
Ensuite nous remarquons la possibilité d'utiliser la troisième identité (avec $a^2 = (x-11)^2$ et $b^2 = \sqrt{99}^2$.
D'où : $x^2 - 12x + 12 = (x-11)^2 - 99 = (x - 11 - \sqrt{99})(x - 11 + \sqrt{99})$ (et l'expression est factorisée).

4.2 Exercices

Exercice 4.3 Factoriser les expressions suivantes (en utilisant la méthode appropriée) :

1. $(3x-5)(4x+5) - (4x+5)(2x+7)$

2. $(6x-11)^2 + (6x-11)(2x-5)$

3. $25x^2 - 144$

4. $49x^2 + 70x + 25$

5. $(4x+3)(2x-7)-(2x-7)(3x+2)$

6. $9x^2-6x+1$

7. $(4x-20)(x+2)-(x-5)(12x-6)$

8. $64x^2-32xy+4y^2$

9. $\frac{x^2}{4}-5x+25$

10. $15x^2 - 30x + 15$

11. $4x^2 + 12x + 9 - 9 - 72$

12. $9x^2 - 30x - 75$

Exercice 4.4 Factoriser les expressions suivantes :

1. $A(x) = (2x - 5)(7 + 3x) - (4x^2 - 20x + 25)$

2. $B(x) = (x-3)(3x+5)+(9x^2+30x+25)$

3. $C(x) = 3(x+3)(2x+3)-(4x^2-9)$

4. $D(x) = (2x-1)^2-(3-5x)^2$

Corrigé : Voici des éléments de corrections

$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (4x^2 - 20x + 25)$
$A(x) = (2x-5)(7+3x) - ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2)$
$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (2x-5)^2$
$A(x) = \boxed{(2x-5)}\,(7+3x) - \boxed{(2x-5)}\,(2x-5)$
$A(x) = \boxed{(2x-5)}\,[(7+3x) - (2x-5)]$
$A(x) = \boxed{(2x-5)}\,[7+3x-2x+5]$
$A(x) = \boxed{(2x-5)}\,(x+12)$

$B(x) = (x-3)(3x+5) + (9x^2 + 30x + 25)$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + ((3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2)$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + (3x+5)^2$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + (3x+5)(3x+5)$
$B(x) = \boxed{(3x+5)}\,[(x-3) + (3x+5)]$
$B(x) = \boxed{(3x+5)}\,[x-3+3x+5]$
$B(x) = \boxed{(3x+5)}\,(4x+2)$
$B(x) = 2 \times \boxed{(3x+5)}\,(2x+1)$

$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (4x^2 - 9)$
$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - ((2x)^2 - 3^2)$
$C(x) = 3(x+3)\,\boxed{(2x+3)} - \boxed{(2x+3)}\,(2x-3)$
$C(x) = \boxed{(2x+3)}\,[3(x+3) - (2x-3)]$
$C(x) = \boxed{(2x+3)}\,[3x+9-2x+3]$
$C(x) = \boxed{(2x+3)}\,(x+12)$

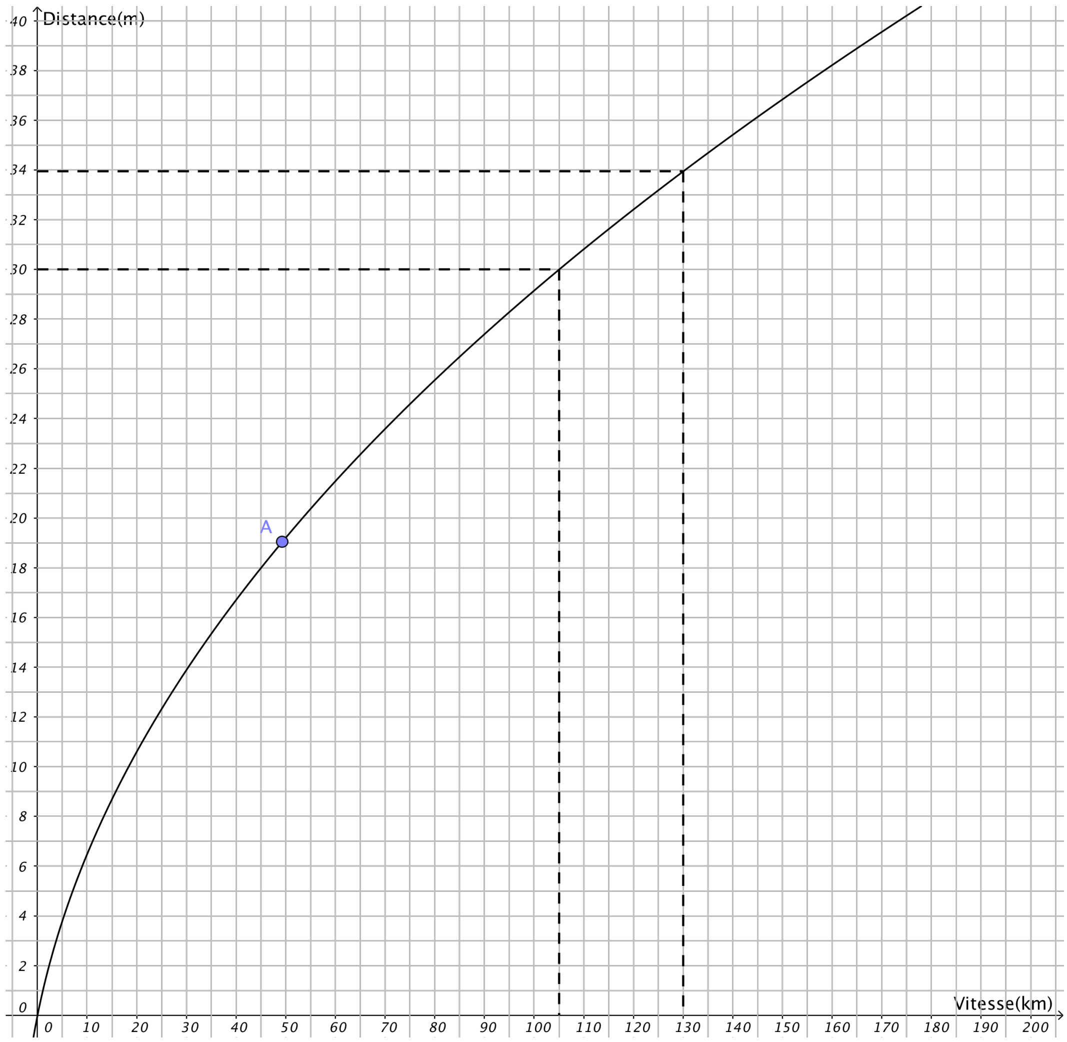
$D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2 \quad \rightsquigarrow$ *Type* $a^2 - b^2$
$D(x) = [(2x-1) + (3-5x)]\,[(2x-1) - (3-5x)]$
$D(x) = [2x-1+3-5x]\,[2x-1-3+5x]$
$D(x) = (-3x+2)(7x-4)$

5. Notion de fonction

5.1 Définitions

Définition 5.1.1 — Fonction. Une fonction est une procédure permettant d'associer deux grandeurs. On note habituellement une fonction par la lettre f.

Exercice 5.1 Voici un exemple de la représentation de la fonction "distance de freinage" d'une voiture sur sol mouillé.



1. Quelles sont les deux grandeurs qu'associent la fonction distance de freinage ?
2. Compléter la phrase suivante :

   La fonction distance de freinage représente .... en fonction de ....

3. Déterminer la distance de freinage d'un véhicule roulant à 60 km/h.

■

Propriété 5.1.1 Si f est une fonction qui au nombre x, associe le nombre y, on note $y = f(x)$ (lire f de x) ou $f : x \mapsto f(x)$ (lire f qui à x associe $f(x)$).
On dit que y ou $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de y ou $f(x)$ par f.

Exercice 5.2 Reprendre les données de l'exercice précédent. Voici l'expression de la fonction f

$$f : x \mapsto \frac{2,5x^2}{254}$$

1. Que représente x dans cette expression ?
2. Que représente $f(x)$ dans cette expression ?
3. Sans utiliser le graphique, déterminer la distance de freinage d'un véhicule roulant à 75 km/h.
4. En utilisant le graphique, déterminer l'image de 20 puis interpréter le résultat.
5. En utilisant le graphique, déterminer l'antécédent de 20 puis interpréter le résultat.

■

Exercice 5.3 Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité.
Exemple : "L'image de 2 par la fonction f est 3" se traduit par : $f(2) = 3$.
1. L'image de -7 par la fonction f est 3,5.
2. -5 est l'image de -3 et de 4 par la fonction g.
3. 3 est l'antécédent de -5 par la fonction h.
4. Le point $A(3;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

■

Exercice 5.4 Traduire chacune des égalités suivantes par deux phrases distinctes : l'une utilisant le mot image et l'autre le mot antécédent.
1. $f(-1) = 2$
2. $h(-3) = -4$ et $h(4) = -4$
3. $g(2) = -1$

■

Exercice 5.5 Soit f la fonction qui à la vitesse associe la distance de freinage sur route mouillée. On donne

$$f(x) = \frac{2,5x^2}{254}$$

Soit g la fonction qui à la vitesse associe la distance de freinage sur route sèche. On donne

$$g(x) = \frac{1,25x^2}{254}$$

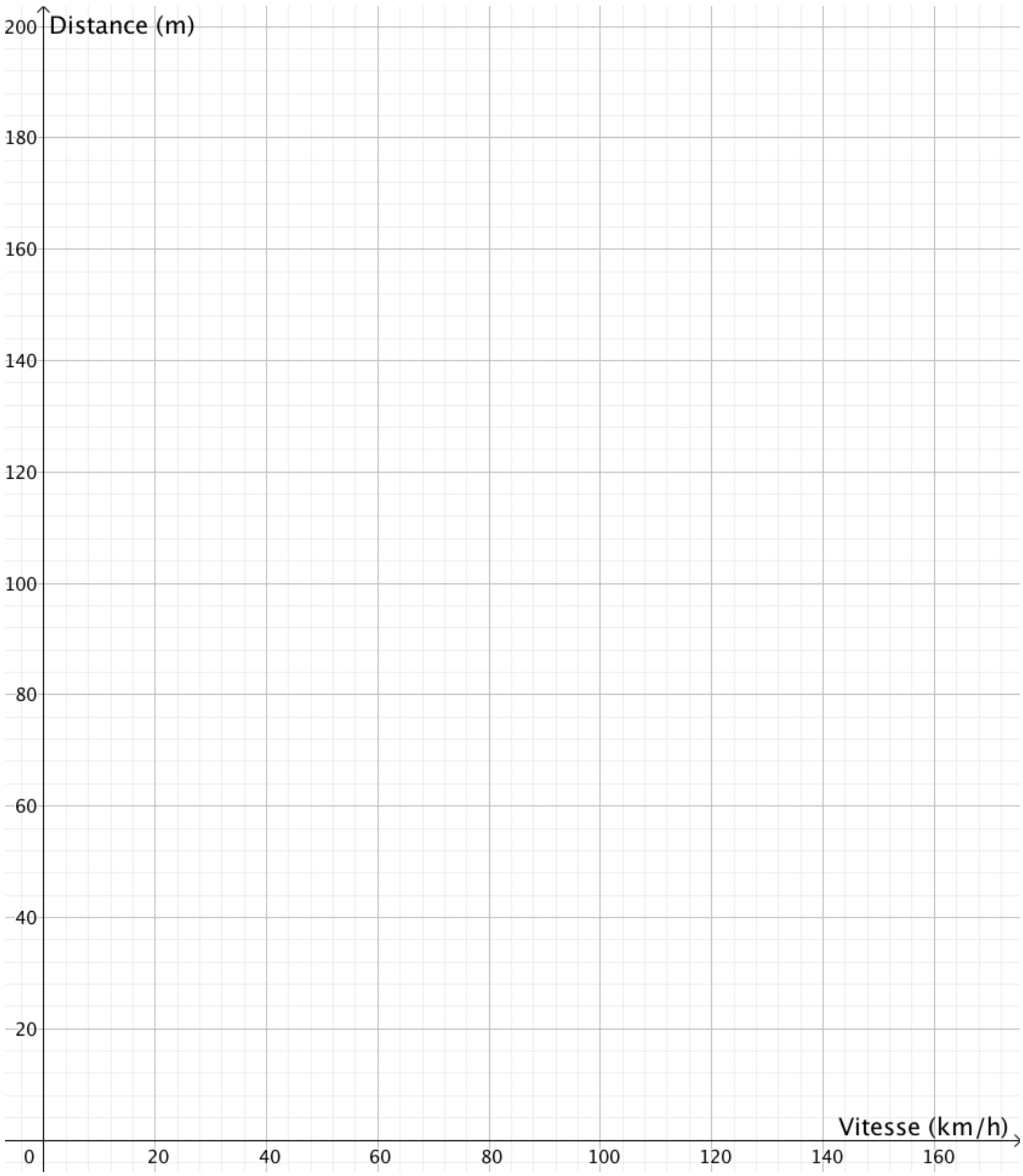
1. Compléter le tableau de valeurs pour la fonction f.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$f(x)$											

2. Compléter le tableau de valeurs pour la fonction g.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$g(x)$											

3. Représenter les fonctions f et g sur le graphique ci-dessous.



4. Déterminer à partir de quelle vitesse, la distance de freinage sur route mouillée est deux fois plus élevée que sur route sèche.

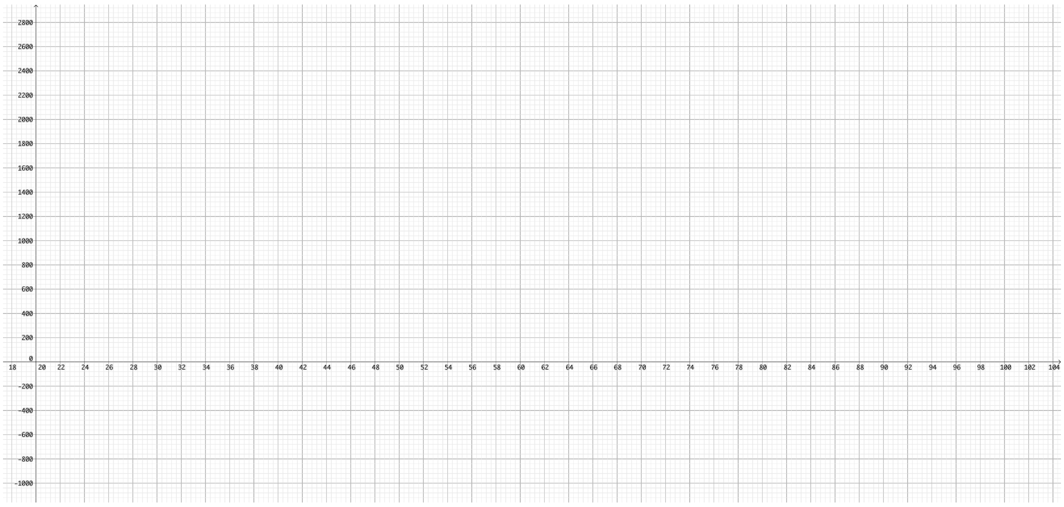
Exercice 5.6 Le gérant d'un hôtel réalise une étude sur le taux d'occupation des chambres. En désignant par x ce taux exprimé en %, on montre que le bénéfice, en euros, en fonction de x est modélisé par une fonction f sur l'intervalle $[20;100]$ telle que :

$$f : x \mapsto -x^2 + 160x - 3900$$

1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$										

2. Construire la représentation de la fonction f dans le repère ci-dessous.

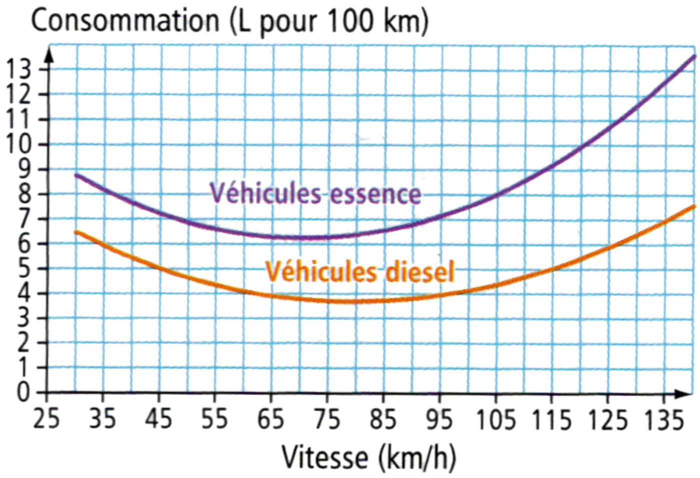


3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2200$
4. Donner une interprétation des résulats obtenus à la question précédente.

Exercice 5.7 La consommation en carburant des véhicules de particuliers dépend de la vitesse moyenne de circulation. Pour réduire la pollution due à cette consommation, la vitesse est limitée à 70km/h au lieu de 90km/h sur certaines routes.

Probématique : Cette mesure est-elle efficace ?

Le graphique ci-dessous représente les consommation pour 100km des véhicules roulant au diesel et à l'essence en fonction de la vitesse moyenne. On appelle f, la fonction pour les véhicule essence et g la fonction pour les véhicules diesel.



1. Que permettent d'associer les fonctions f et g ?
2. Déterminer, pour chaque type de véhicule, la vitesse où la consommation est minimale.
3. Répondre, en argumentant un maximum, à la problématique.

Exercice 5.8 Traduire chacune des égalités suivantes par deux phrases distinctes : l'une utilisant le mot image et l'autre le mot antécédent.

1. $f(6) = -12$
2. $h(13) = -120$ et $h(-6) = -4$
3. $g(12) = -10$

Exercice 5.9 Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité.

1. L'image de 8 par la fonction f est 4.
2. -5 est l'image de -3 et de 4 par la fonction g.
3. 3 est l'antécédent de -5 par la fonction h.
4. Le point $A(12;-7)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

5.2 Exercices complémentaires

Exercice 5.10 On sait que : $f(3) = 8$ et $f(-5) = -6$

1. Traduire chacune des égalités par une phrase contenant le mot image.

2. Traduire chacune des égalités par une phrase contenant le mot antécédent.

3. Traduire par une égalité :
   - L'image de 3 par la fonction g est -5.
   - -8 est l'image de 7 par la fonction h.
   - -5 a pour image 9 par la fonction w.
   - L'antécédent de 9 par la fonction g est -8.
   - 3 a pour antécédent 8 par la fonction w.
   - -12 est l'antécédent de 12 par la fonction h.

Exercice 5.11 Soit la fonction f telle que $f(-3) = -4$, $f(-1) = 6$, $f(2) = 5$ et $f(4) = 7$

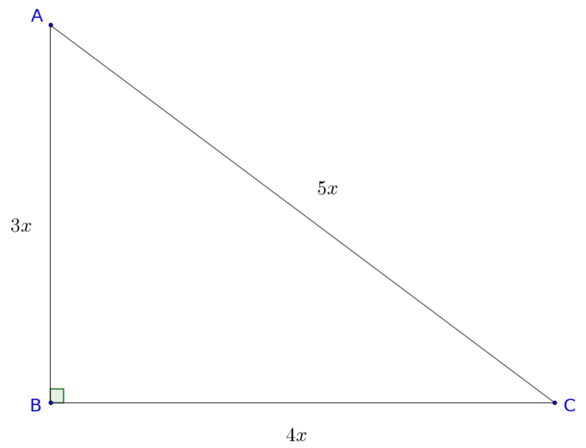
	Vrai	Faux
L'image de -4 par la fonction f est -3.		
L'image de -1 par la fonction f est -6.		
L'antécédent de 5 par la fonction f est 2.		
L'antécédent de 4 par la fonction f est 7.		
-1 est l'image de 6 par la fonction f.		
-1 a pour image 6 par la fonction f.		
7 est l'image de 4 par la fonction f.		
7 a pour antécédent 4 par la fonction f.		
-3 a pour antécédent -4 par la fonction f.		

Exercice 5.12 Soit la fonction g telle que $g(x) = 2x^2 + 3$ Compléter le tableau de valeur suivant :

x	-3	-1		5	10
g(x)			3		

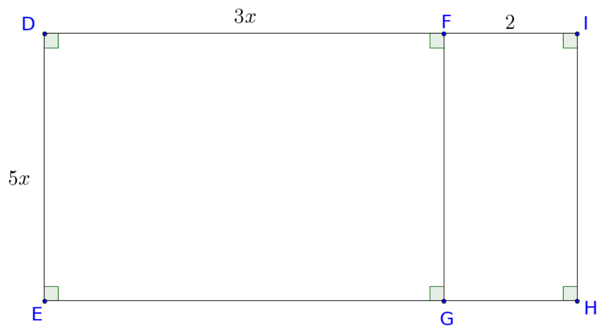
Exercice 5.13 Fonction géométrique

1. Les mesures seront exprimées en cm. Ecrire le périmètre $p(x)$ et l'aire $A(x)$ en fonction de x de la figure suivante :



2. Calculer $p(3)$ et $A(3)$. Donner une interprétation des résultats obtenus.

3. Ecrire le périmètre $r(x)$ et l'aire $C(x)$ en fonction de x du rectangle $DIHE$:



4. Calculer les valeurs exactes de $r(3)$ et $C(3)$. Donner une interprétation des résultats obtenus.

Exercice 5.14 On considère la fonction h qui, à un nombre t, fait correspondre le nombre $-5t^2+20t$. Lors d'un dégagement par un gardien de but, si t est le temps écoulé depuis le tir, exprimé en secondes, $h(t)$ est la hauteur en mètres du ballon au dessus du sol, t secondes après le tir.

1. À quelle hauteur est le ballon au bout d'une seconde ? Et au bout de deux secondes ?

2. Calculer $h(4)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

3. Compléter le tableau de valeurs suivant

x	-5	0	1	1,5	2	2,5	3	5
h(x)								

4. Donner une interprétation de ces résultats lorsque cela est possible.

6. Arithmétique

6.1 Division euclidienne

Définition 6.1.1 — Les entiers naturels. Un nombre entier naturel est un nombre positif sans partie décimale. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$$

Définition 6.1.2 — Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne d'un entier a (le dividende) par un entier b (le diviseur) non nul, c'est trouver deux entiers q (le quotient) et r (le reste) tels que :

$$a = b \times q + r$$

avec $r < b$

Exemple 6.1.1 Division euclidienne de 185 par 7

$$\begin{array}{r|l} 1\,8\,5 & 7 \\ \cline{2-2} 4\,5 & 2\,6 \\ 3 & \end{array}$$

Soit $185 = 7 \times 26 + 3$

6.2 Multiples et diviseurs

Définition 6.2.1 — Multiple et diviseur. Un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b.
- Si l'entier b divise l'entier a il existe donc un entier q tel que : $a = b \times q$

Propriété 6.2.1 — Critères de divisibilité. Voici les principaux critères de divisibilité :
- Un entier est divisible par 2 quand il est pair donc quand son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Par exemple 110 est divisible par 2.
- Un entier est divisible par 3 quand la somme de ses chiffres est divisible par 3. Par exemple 114 est divisible par 3 car 1+1+4 = 6 et 6 est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5 quand son chiffre des unités est 0 ou 5. Par exemple 110 est divisible par 5.
- Un entier est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est divisible par 9. Par exemple 494 est divisible par 9 car 4+9+5 = 18 et 18 est divisible par 93.
- Un entier est divisible par 10 quand son chiffre des unités est 0. Par exemple 110 est divisible par 10.

6.3 Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Définition 6.3.1 — Nombres premiers. Un nombre premier est un nombre qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exercice 6.1 Il y a 25 nombres premiers entre 0 et 100. Trouver les.

■

Propriété 6.3.1 Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique,à l'ordre des facteurs près.

Exemple 6.3.1 Décomposition de 1014 :

$$\begin{aligned} 1014 &= 2 \times 507 \\ &= 2 \times 3 \times 169 \\ &= 2 \times 3 \times 13^2 \end{aligned}$$

Exercice 6.2 ■

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivant :

- 1044 =
- 2565 =
- 158 =

Définition 6.3.2 — Fractions irréductibles. Une fraction est dite irréductibles lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple 6.3.2

$$\begin{aligned} \frac{1014}{84} &= \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{13^2}{2 \times 7} \\ &= \frac{169}{14} \end{aligned}$$

7. Equations et inéquations

7.1 Equations du second dégré

7.1.1 Equation produit nul

Définition 7.1.1 — Equation produit nul. On appelle équation produit nul, une équation dont un membre est un produit de facteurs et dont l'autre membre est nul.

Exercice 7.1 En utilisant le définition ci-dessus, déterminer les équations qui sont des équations de produit nul.

- $2x+3=0$
- $(6x-4)(2x+1)=0$
- $(6x-4)-(2x+1)=0$
- $(9x+4)(2x+1)=4$
- $6(2x+1)=0$
- $0=(-3x+5)(3x+2)$

■

Propriété 7.1.1 Un produit de facteur est nul si et seulement un des facteurs est nul.
Autrement si $a\times b=0$, $a=0$ ou $b=0$.

Exercice 7.2 En utilisant la propriété précédente, résoudre les équations suivantes :

- $(6x-4)(2x+1)=0$
- $(2x+11)(4x+1)=0$

- $(-2x-4)(x+1)=0$

- $2x(6x+14)=0$

Parfois il est nécessaire de factoriser afin de construire l'équation produit nul.

Exercice 7.3 Résoudre les équations suivantes :

- $(2x+1)(6x-6)+(2x+1)(5x-4)=0$

- $(3x-6)(5x-3)-(3x-6)(3x+9)=0$

Il n'y a pas que le facteur commun comme méthode de factorisation.

- $x^2+4x+1=0$

- $(2x+6)^2-(6x+2)^2=0$

7.1.2 Equation du type $x^2 = a$

Propriété 7.1.2 L'équation $x^2 = a$:
- Si $a < 0$ n'a pas de solution
- Si $a = 0$ a une seule solution 0.
- Si $a > 0$ a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exercice 7.4 Prouver la propriété précédente à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Exercice 7.5 Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = 25$

- $x^2 + 5 = 7$

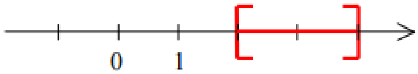
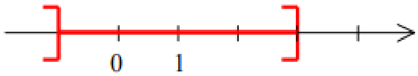
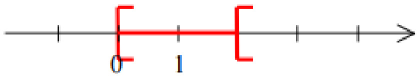
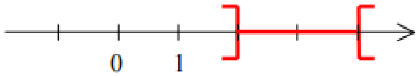
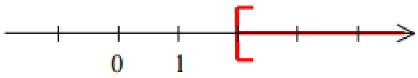
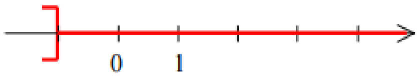
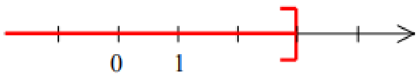
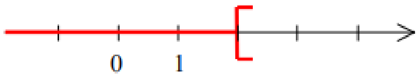
- $x^2 + 49 = 0$

- $3x^2 = 147$

7.2 Inéquations

7.2.1 Représentation d'un ensemble de nombre

Afin de représenter un ensemble de nombre, on peut utiliser un axe. En voici quelques exemples :

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	] -1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2 [	
$2 < x < 4$	] 2 ; 4 [	
$x \geq 2$	[2 ; +∞ [∞ désigne l'infini	
$x > -1$	] -1 ; +∞ [	
$x \leq 3$	] -∞ ; 3]	
$x < 2$	] -∞ ; 2 [	

R La notation sous forme d'interval est du programme de seconde.

Exercice 7.6 Représenter à l'aide d'un axe, l'ensemble des nombres suivants :

- $x > 5$
- $x \geq 4$
- $-3 \leq x \leq 2$
- $-3 \ < x \leq 0$

- $x < 10$

- $x > -4$

Cette représentation va nous être utile pour représenter les solutions d'une inéquation.

7.2.2 Résolution d'une équation

Pour résoudre une inéquation, on utilise les mêmes règles que pour une équation. Mais on rajoute une.

Propriété 7.2.1 Dans une inéquation, si on multiple ou on divise les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité.

Exemple 7.2.1 Dans un premier temps, on utilise les règles classiques afin d'isoler x.

$2x-4 > 6x-2$

$2x-4 \; +4 > 6x-2 \; +4$

$2x > 6x+2$

$2x \; -6x > 6x+2 \; -6x$

$-4x > 2$

$\dfrac{-4x}{-4} < \dfrac{2}{-4}$

$x < -2$

Exercice 7.7 Résoudre les inéquations suivantes puis représenter l'ensemble des solutions sur un axe.

- $5-2x \geq 7$

- $3x-2>x-4$

- $-4x+\dfrac{1}{2}\leq -9$

- $x+5\leq 4(x+1)+7$

- $\dfrac{3x-2}{4}\leq -2$

- $\frac{5x+1}{6} > \frac{3x-3}{8}$

8. Fonctions affines et linéaires

8.1 Fonctions linéaires

Définition 8.1.1 — Fonctions linéaires. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombres ax (où a est un nombre donnée) est appelé fonction linéaire.

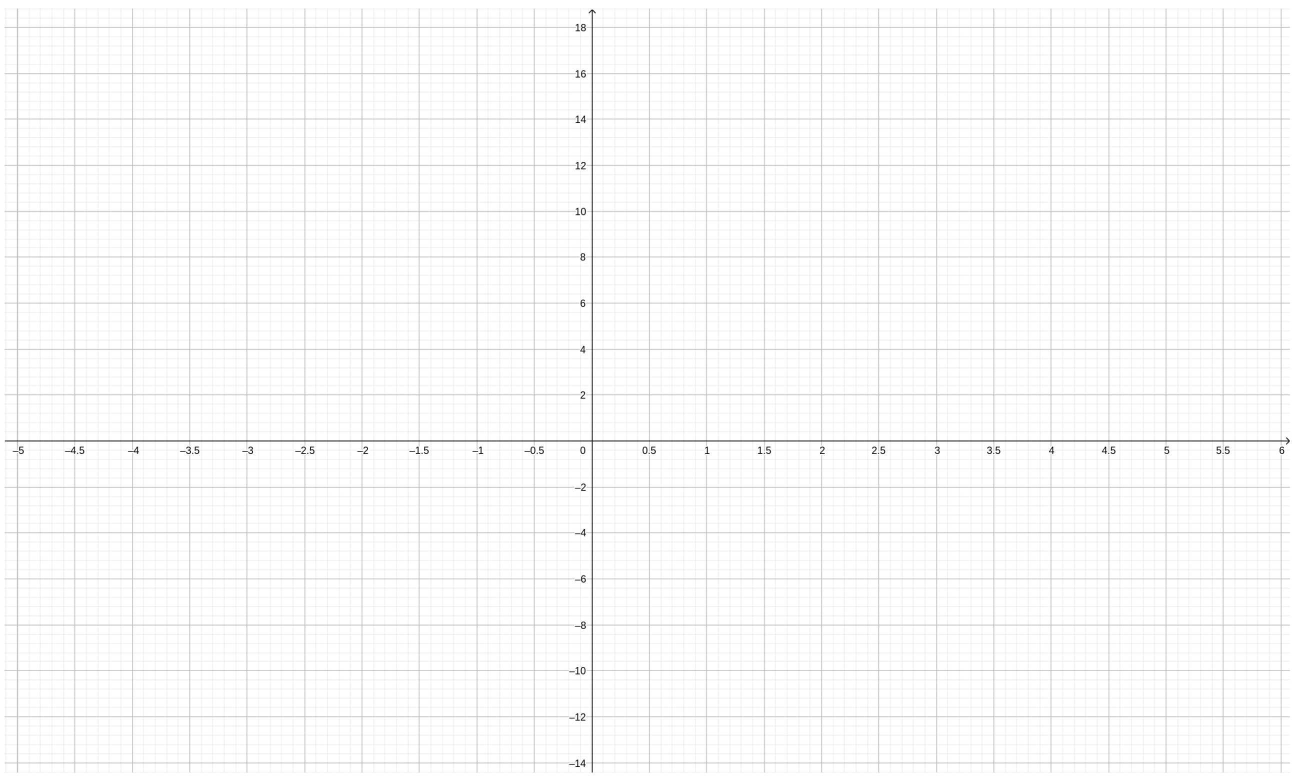
- On la note $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$

Exercice 8.1 Soit la fonction $f : x \mapsto 2,7x$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

2. Tracer la courbe représentative de la fonction



■

Exercice 8.2 En nous aidant de l'exemple ci-dessus, nous allons maintenant réfléchir aux propriétés des fonctions linéaires.

1. Expliquer pourquoi toutes les courbes représentatives de fonctions linéaires passe par l'origine du repère.

2. Déterminer la nature d'un tableau de valeur d'une fonction linéaire.

A partir de l'étude de l'exercice précédent, écrire une propriété relative à la courbe représentative d'une fonction linéaire ainsi qu'une propriété relative au tableau de valeurs.

Propriété 8.1.1 Courbe représentative d'une fontion linéaire

Propriété 8.1.2 Tableau de valeur d'une fontion linéaire

Définition 8.1.2 — Taux d'accroissement. On appelle taux d'accroissement entre deux points $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$ d'une courbe, le nombre τ tel que :

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exercice 8.3 Prouver que pour toutes les fonctions linéaires dont l'écriture est $f(x) = ax$ ont un taux d'accroissement égale à a.
Conseils :

1. Garder son calme et ne pas souffler
2. Analyser la question (il ne s'agit que de prouver une égalité, adopter donc les réflexes enseignés pour ce type de question)
3. Prendre un stylot dans sa main et commencer à travailler cette notion de taux d'accroissement et arrêter de regarder l'énoncé en attendant un intervention divine. Votre dieu a autre chose à faire.

■

Propriété 8.1.3 Une droite est la seule "courbe" ayant un taux d'accroissement constant en tout point.

Exercice 8.4 Expliquer pourquoi l'exercise précédent permet de conclure que la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite.

■

8.2 Fonction affines

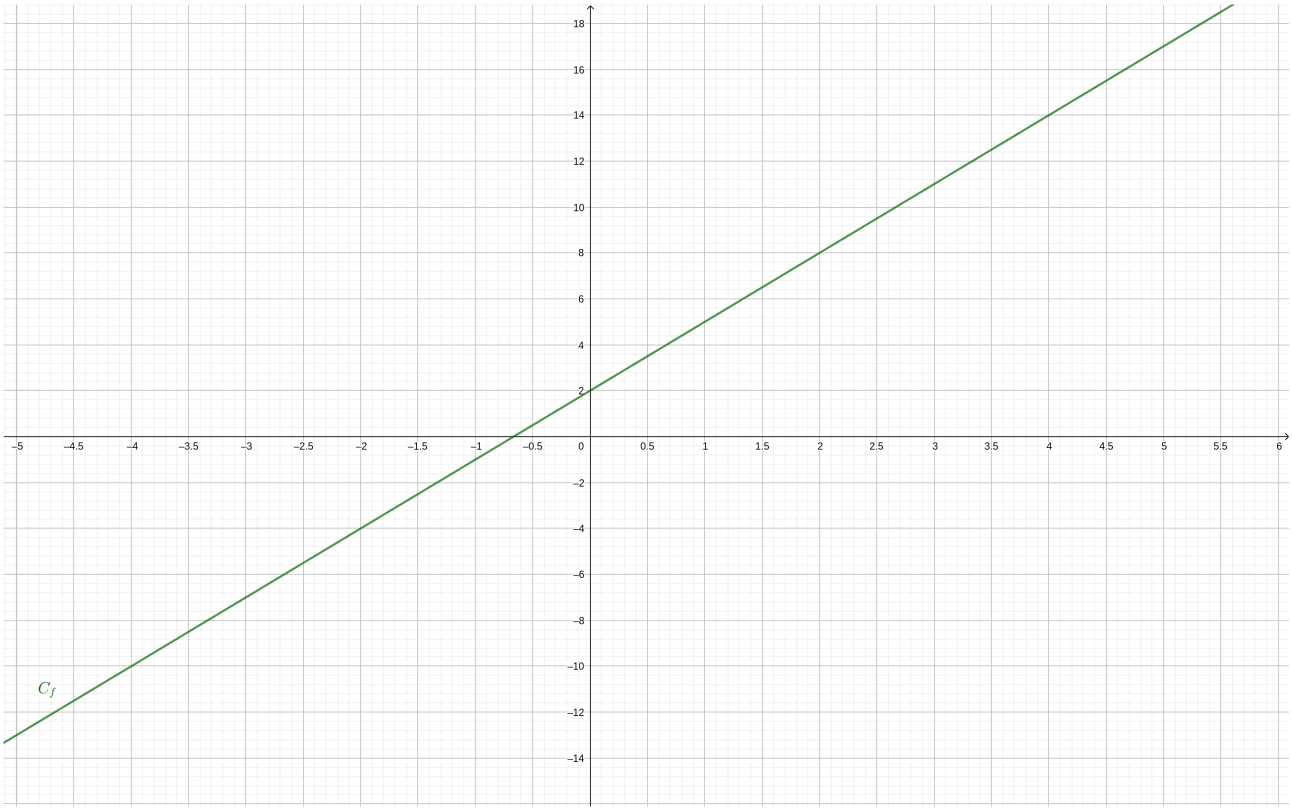
Définition 8.2.1 — Fonctions affines. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombres $ax+b$ (où a et b sont des nombres donnés) est appelé fonction affine.

- On la note $f : x \mapsto ax+b$ ou $f(x) = ax+b$

Exercice 8.5 Prouver que la courbe représentative d'une fonction affine passe par le point de coordonnée $(0;b)$. ■

Exercice 8.6 Soit f une fonction affine définie par $f : x \mapsto ax+b$ et deux point $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$ appartenant à la courbe représentative de f. Prouver la courbe représentative de la fonction f est une droite. ■

Exercice 8.7 Soit C_f la courbe représentative de la fonction f.



Déterminer l'équation de la fonction f.

8.3 Bilan

Lister l'ensembe des propriétés des fonctions affines et linéaires.

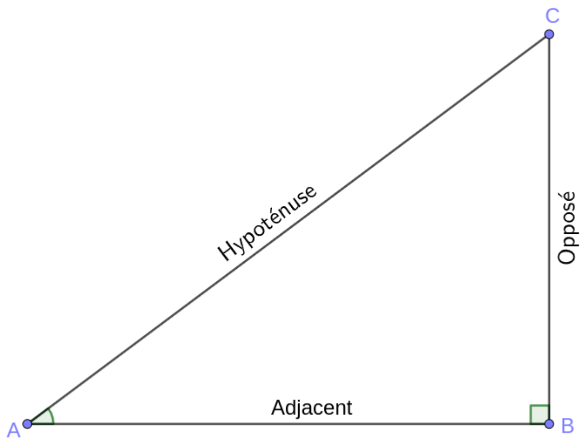
Fonctions linéaires	**Fonctions affines**

9. Trigonométrie

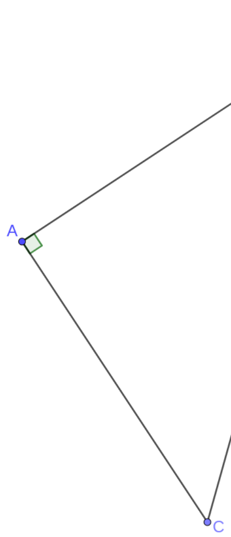
9.1 Vocabulaire

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement travailler dans un triangle rectangle. Vous connaissez déjà l'hypoténuse qui est le plus grand côté, nous allons définir le côté adjacent et le côté opposé qui dépendent de l'angle étudié dans le rectangle.

Exemple 9.1.1 Voici un exemple en prenant l'angle $\widehat{BAC}$ comme référence.



Exercice 9.1 Compléter le schéma suivant en donnant les noms des côtés. L'angle $\widehat{ACB}$ est pris comme référence.



■

9.2 Angles et longueurs

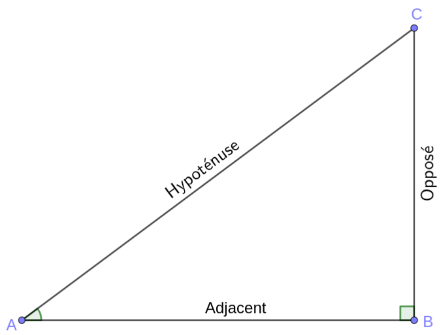
Activité 9.1 En utilisant la notion de taux d'accroissement, démontrer que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont égaux.

Définition 9.2.1 — Tangente. Dans un triangle rectangle, on appelle tangente le rapport entre le coté opposé et le coté adjacent d'un angle.

$$Tangente = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

Exemple 9.2.1

$$tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$



R Votre calculatrive possède une fonction `Arctan` qui permet à partir de la valeur d'une tangente de déterminer la valeur de l'angle correspondant.

Exercice 9.2 Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $BC = 6$ et $AB = 4$. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$.

■

Sur le même modèle, il existe deux autres fonctions trigonométriques : le sinus (noté *sin*) et le cosinus (noté *cos*)

Définition 9.2.2 — Cosinus et sinus. Dans un triangle rectangle, on appelle cosinus le rapport entre le coté adjacent et l'hypoténuse d'un angle.

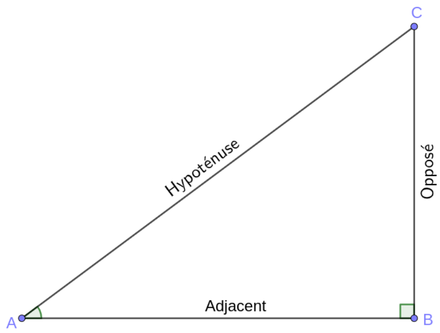
$$Cosinus = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus le rapport entre le coté opposé et l'hypoténuse d'un angle.

$$Sinus = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

Exemple 9.2.2

$$cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$
$$sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$$
$$tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$



R Au niveau troisième, les fonctions cos,sin et tan ne sont définies que dans un triangle rectangle.

Exercice 9.3 Prouver l'égalité suivante :

$$cos^2(\widehat{A}) + sin^2(\widehat{A}) = 1$$

■

Exercice 9.4 On sait que $sin(\widehat{A}) = 0.7$.

1. Déterminer la valeur de $cos(\widehat{A})$

2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{A}$

9.3 Applications

Alors à quoi ça sert tout ça ? La trigonométrie est un outil supplémentaire vous permettant de déterminer la valeur d'un angle ou la mesure d'un côté. Mais attention, on ne peut appliquer la trigonométrie que dans un triangle rectangle.

Exercice 9.5 On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que : $AB = 8cm$. M est un point du cercle tel que : $\widehat{BAM} = 40°$.

1. Quelle est la nature du triangle BAM ? Justifier.

2. Calculer la longueur BM arrondie à 0,1 cm prés.

Exercice 9.6 L'unité de longueur est le centimètre. Un triangle isocèle SAB est tel que $SA = SB = 6$ et $AB = 8$

1. Faire un schéma et tracer la hauteur qui passe par le sommet S. Cette hauteur coupe le côté $[AB]$ au point I.

2. Expliquer pourquoi $IA = 4$.

3. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{IAS}$

4. En déduire la valeur, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{IAS}$.

10. Statisitiques - Probabilité

10.1 Statisitiques

10.1.1 Vocabulaire

Définition 10.1.1 — Population. On appelle population d'une série statistique l'ensemble des sujets d'une étude statistique.

Définition 10.1.2 — Caractère. On appelle caractère d'une série statistique le critère suivant lequel on étudie la population. On note x_i le caractère de la ligne i.

Définition 10.1.3 — Effectif. L'effectif correspond au nombre d'individus correspondant à un caractère. On note x_i le caractère et n_i l'effectif de la de la ligne i.

Définition 10.1.4 — Effectif total. On appelle effectif total le nombre total d'individus dans la population. On le note N.

Exercice 10.1 Voici deux études statistiques :

Etude sur l'âge des élèves dans une classe de quatrième.

Age	Effectif
11	2
12	10
13	9
14	7

Etude d'un constructeur automobile sur la couleur de la voiture de ses clients.

Couleur	Effectif
Rouge	10
Gris	20
Noir	25
Bleu	15
Vert	8
Blanc	30

1. Déterminer, pour chacune des études, la population étudiée.

2. Déterminer, pour chacune des études, la caractère étudié.

3. Pour chacune des études, déterminer x_3 et n_4.

4. Pour chacune des études, donner un interprétation sous la forme d'une phrase de la troisième ligne de chaque tableau.

5. Déterminer l'effectif total de chaque série.

10.1.2 Indicateurs

Définition 10.1.5 — Étendue. L' étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Définition 10.1.6 — Fréquences en pourcentage. On appelle fréquence le rapport entre un effectif partiel (n_i) et l'effectif total (N). On note f_i la fréquence de la ligne i.

$$f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$$

Définition 10.1.7 — Moyenne. On appelle moyenne le rapport entre la somme des valeurs et le nombre de valeurs. On la note $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{somme(n_i \times x_i)}{N} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$$

Exercice 10.2 Reprenons une étude statistique du premier exercice.
Etude sur l'âge des élèves dans une classe de première BAC.

Age	**Effectif**
11	2
12	10
13	9
14	7

1. Déterminer l'étendue de cette série. Donner une interprétation de ce résultat.
2. Reproduire, sur votre copie, les tableaux ci-dessous en rajoutant une colonne "fréquences en %" puis compléter cette colonne. Vos calculs doivent être arrondi au centième.
3. Déterminer la moyenne de cette série. Donner une interprétation de ces résultats.

Le temps d'attente moyen d'un client est de 5,43 *min*.

Corrigé :

1. L'étendue de la première série est $18-15=3$. Deux élèves de première BAC ont au plus 3 ans d'écart.
   L'étendue de la deuxième série est $12-0=12$. Un client attend au caisse entre 0 et 12 minutes.

2. Etude sur l'âge des élèves dans une classe de première BAC.

Age	Effectif	Fréquence en %
15	2	7,14
16	10	35,71
17	9	32,14
18	7	25

Etude d'un supermarché sur le temps d'attente, en minute, aux caisse.

Temps	Effectif	Fréquence en %
[0;3[	226	21,36
[3;5[	218	20,60
[5;7[	316	29,87
[7;9[	198	18,71
[9;12[	100	9,45

3. Calcul de la moyenne d'âge.

$$\bar{x}=\frac{15\times2+16\times10+17\times9+18\times7}{28}$$

$$\bar{x}=16,75$$

La moyenne d'âge des élèves de cette classe de première BAC est 16,75 ans.
Calcul du temps d'attente moyen.

$$\bar{x}=\frac{1,5\times226+4\times218+6\times316+8\times198+10,5\times100}{1058}$$

$$\bar{x}=5,43$$

Le temps d'attente moyen d'un client est de 5,43 *min*.

Exercice 10.3 En sortie de caisse, on demande aux agents de caisse le code postale du client afin de pouvoir faire une étude géographique de la clientèle. Après une semaine de saisie, on a obtenu le tableau suivant :

Commune	Effectif
Beynost	236
Miribel	125
Montuel	75
Rilleux-La-Pape	144
Caluire	80
Lyon	300
Tramoyes	35

1. Quelle est la population étudiée ?

2. Quel est le caractère de la population étudiée ? Est-il quantitatif ou qualitatif ?

3. Calculer l'effectif total.

4. Recopier et compléter le tableau en calculant la fréquence relative à chaque ville, d'abord sous forme décimale puis en pourcentage arrondi à l'unité.
5. Représenter cette série statistique sous la forme d'un diagramme circulaire.
6. A l'aide de la carte ci-dessous, imaginer et réaliser une représentation pertinente de la série statistique et donner lui un titre.

Définition 10.1.8 — Médiane. La médiane M_e d'une série est telle que :
- au moins 50% des données ont des valeurs inférieures ou égales à M_e
- au moins 50% des données ont des valeurs supérieures ou égales à M_e

Exemple 10.1.1 Calcul de la médiane avec une liste :
Ainsi, supposons qu'un entraîneur de natation veuille former deux groupes de niveau, demande à ses 9 nageurs de parcourir deux longueurs en nage libre, et relève les temps suivants en secondes :

$$30,6;29,1;32,9;35,1;30,0;36,4;31,7;35,5;33,9$$

En rangeant les temps dans l'ordre croissant, on obtient :

$$29,1;30,0;30,6;31,7;32,9;33,9;35,1;35,5;36,4$$

On peut déjà isoler les 4 meilleurs nageurs et les 4 moins bons, mais il reste un nageur qui pourrait être dans l'un ou l'autre groupe : celui qui a nagé en 32,9 s.

Ce temps est appelé la médiane de la série statistique : il partage la série en deux groupes de même effectif.

Il y aurait eu une petite difficulté supplémentaire s'il y avait eu un 10ème nageur. Supposons qu'un autre nageur arrive dans le cours de natation, et soit capable de nager en 28,7 secondes.

La liste des temps dans l'ordre croissant devient :

$$28,7;29,1;30,0;30,6;31,7;32,9;33,9;35,1;35,5;36,4$$

Comme l'effectif du groupe est devenu pair, il n'y a plus de « nombre au milieu », il y en a deux !

La médiane est alors la moyenne de ces deux nombres, on calcule : $(31,7+32,9)\div 2 = 32,3s$.

En résumé : lorsque la série est rangée dans l'ordre (croissant ou décroissant)
- si l'effectif total est impair, la médiane est la valeur centrale de la série,
- si l'effectif total est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales de la série.

Calcul de la médiane avec une tableau d'effectifs :
Il est un peu plus difficile de déterminer une médiane dans un tableau d'effectifs, car on ne peut plus visualiser la liste de valeurs et son « milieu ».

Prenons ce tableau de pointures de chaussures

Pointure	39	40	41	42	43	44	45
Effectif	2	4	8	15	14	10	8

Si on devait représenter ce tableau sous forme de liste, on le ferait ainsi :

$$39;39;40;40;40;40;41;41;41;41\ldots$$

Il y aurait en tout 61 nombres et ce ne serait pas une méthode efficace. Essayons autre chose. Comme l'effectif total est de 61, essayons de diviser 61 par 2, pour trouver la position de la valeur centrale : $61\div 2 \approx 30,5$.

En arrondissant ce nombre à 31, on constate que la valeur centrale de la série est la 31ème.

Il nous reste maintenant à savoir quelle est cette 31ème valeur. Pour cela, nous pouvons calculer les effectifs cumulés croissants : on rajoute une ligne dans laquelle on calcule la somme des effectifs, de gauche à droite :

Pointure	39	40	41	42	43	44	45
Effectif	2	4	8	15	14	10	8
Effectifs cumulés croissants	2	6	14	29	43	53	61

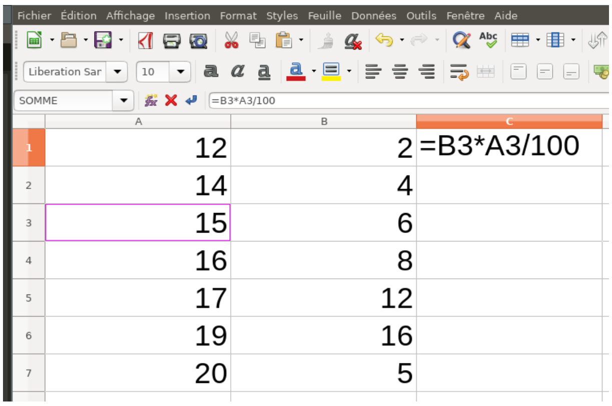
Cela signifie que :
- la 1ère et la 2ème valeur de la série sont des 39,
- les valeurs de la 3ème à la 6ème sont des 40,
- les valeurs de la 7ème à la 14ème sont des 41,
- les valeurs de la 15ème à la 29ème sont des 42 etc ...

En particulier, les valeurs de la 30ème à la 43ème sont des 43. Ainsi, la 31ème valeur, la valeur centrale, est 43. On en conclut que la médiane est 43.

10.1.3 Tableur et statistiques

On utilise l'outil informatique pour nous assister. Pour faire nos calculs, on utilise un tableur le plus connu d'entre eux est excel. Pour effectuer ses calculs un tableur n'utilise pas directement une valeur mais l'adresse de la cellule où se trouve cette valeur. Cette addresse est semblable aux échecs, en effet l'adresse $B12$ correspond à la valeur située dans la colonne B ligne 12.

Exercice 10.4 Formules



La cellule $C1$ utiise une formule, quel sera le résultat obtenu ?

■

Exercice 10.5 Le tableau ci-dessous a été réalisé à l'aide d'un tableur. Il indique le nombre d'abonnements Internet à haut débit et à très haut débit entre 2014 et 2016, sur réseau fixe, en France. (Sources : Arcep et Statistica).

	A	B	C	D
1		**2014**	**2015**	**2016**
2	Nombre d'abonnements Internet à haut débit (en millions)	22,855	22,63	22,238
3	Nombre d'abonnements Internet à très haut débit (en millions)	3,113	4,237	5,446
4	Total (en millions)	25,968	26,867	27,684

1. Combien d'abonnements Internet à très haut débit, en millions, ont été comptabilisés pour l'année 2016 ?

2. Vérifier qu'en 2016, il y avait 817 000 abonnements Internet à haut débit et à très haut débit de plus qu'en 2015.

3. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B4 avant de la recopier vers la droite, jusqu'à la cellule $D4$?

4. En 2015, seulement 5,6 % des abonnements Internet à très haut débit utilisaient la fibre optique. Quel nombre d'abonnements Internet à très haut débit cela représentait-il ?

Exercice 10.6 Sur une feuille de calcul, on a reporté le classement des dix premiers pays, par le nombre de médailles, aux Jeux Olympiques de Rio en 2016.

	A	B	C	D	E	F
1	Rang	Pays	Or	Argent	Bronze	Total
2	1	Etats-Unis	46	37	38	121
3	2	Grande Bretagne	27	23	17	67
4	3	Chine	26	18	26	70
5	4	Russie	19	18	19	56
6	5	Allemagne	17	10	15	42
7	6	Japon	12	8	21	41
8	7	France	10	18	14	42
9	8	Corée du Sud	9	3	9	21
10	9	Italie	8	12	8	28
11	10	Australie	8	11	10	29

1. Quelle formule, parmi les trois proposées, a été saisie dans la cellule F2 de cette feuille de calcul, avant qu'elle soit étirée vers le bas ?

Formule A	Formule B	Formule C
$=46+37+38$	=SOMME(C2 : E2)	C2+D2+E2

2. On observe la série des nombres de médailles d'or de ces dix pays.
   (a) Quelle est l'étendue de cette série ?

   (b) Quelle est la moyenne de cette série ?

3. Quel est le pourcentage de médailles d'or remportées par la France par rapport Ã son nombre total de médailles ? Arrondir le résultat au dixième de %.

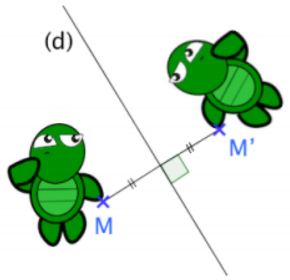
4. Le classement aux Jeux Olympiques s'établit selon le nombre de médailles d'or obtenues et non selon le nombre total de médailles. Pour cette raison, la France avec 42 médailles se retrouve derrière le Japon qui n'en a que 41. En observant l'Italie et l'Australie, établir la règle de classement en cas d'égalité sur le nombre de médailles d'or.

5. Un journaliste sportif propose une nouvelle procédure pour classer les pays : chaque médaille d'or rapporte 3 points, chaque médaille d'argent rapporte 2 points et chaque médaille de bronze rapporte 1 point. Dans ces conditions, la France dépasserait-elle le Japon ?

11. Homothétie

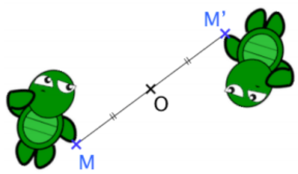
11.1 Les transformations connues

11.1.1 Symétrie axiale



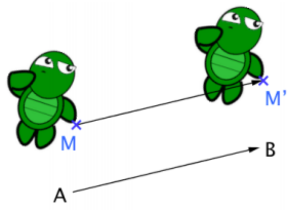
M et M' sont symétriques par rapport à la droite (d) donc :

11.1.2 Symétrie centrale



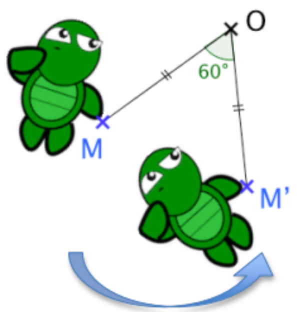
M et M' sont symétriques par rapport au point O donc :

11.1.3 Translation



M' est l'image de M par la translation qui envoie A en B donc :

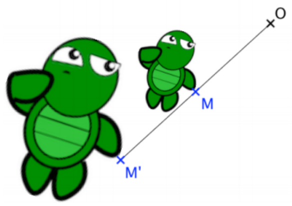
11.1.4 Rotation



M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre donc :

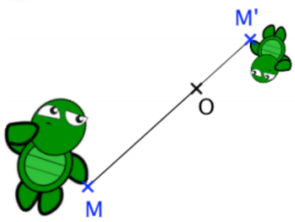
11.2 Homothétie

11.2.1 Homothétie de rapport positif



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2 donc :

11.2.2 Homothétie de rapport négatif



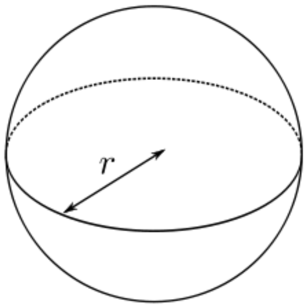
M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -0,5 donc :

12. Géométrie dans l’espace

12.1 La sphère - La boule

Définition 12.1.1 — Sphère. La sphère S de centre O et de rayon r est l’ensembledes points M tels que $OM = R$

Définition 12.1.2 — Boule. La boule B de centre O et de rayon r est l’ensembledes points M tels que $OM \leq R$



Propriété 12.1.1 L’aire de la surface d’une sphère de rayon r est donnée par :

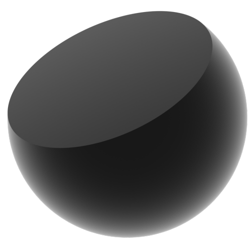
$$\mathscr{A} = 4\pi r^2$$

Propriété 12.1.2 Le volume de la boule de rayon r est donnée par :

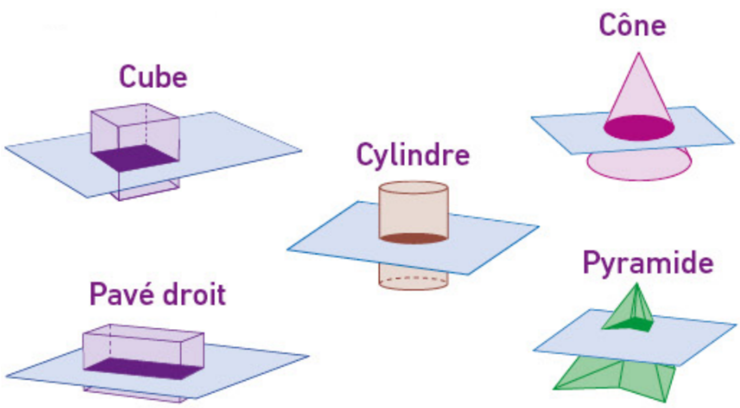
$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

12.2 Sections de solides par un plan

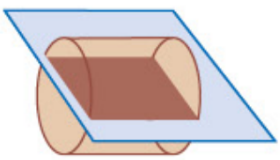
Propriété 12.2.1 La section d’une sphère par un plan est un cercle.



Propriété 12.2.2 Dans les cinq solides ci-dessous, la section par un plan parrallèle à leur base est une réduction du polygone ou disque de base. Dans le cas d'une pyramide et d'un cône, le coefficient de réduction est égale à $k = \dfrac{\text{hauteur de la coupe}}{\text{hauteur du solide}}$

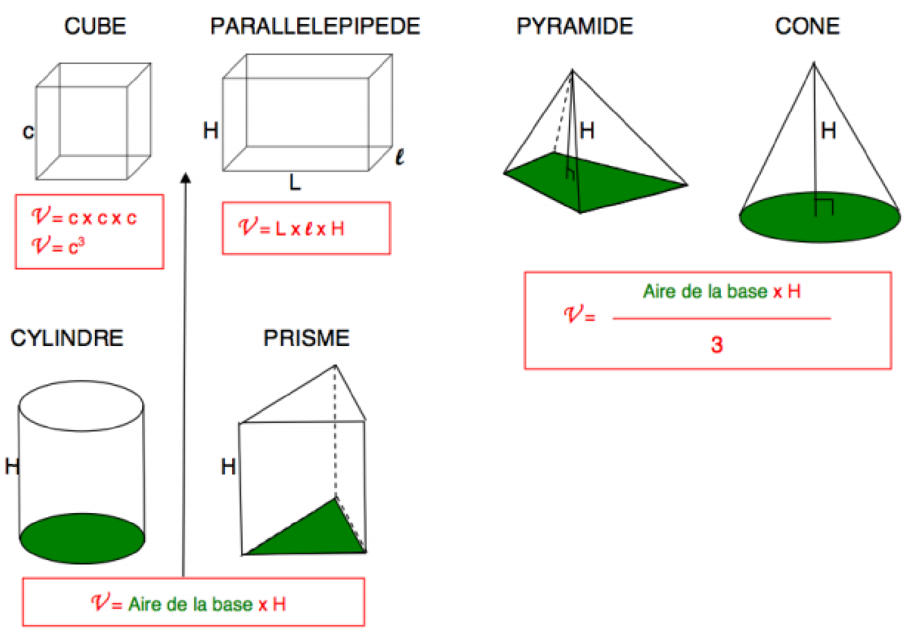


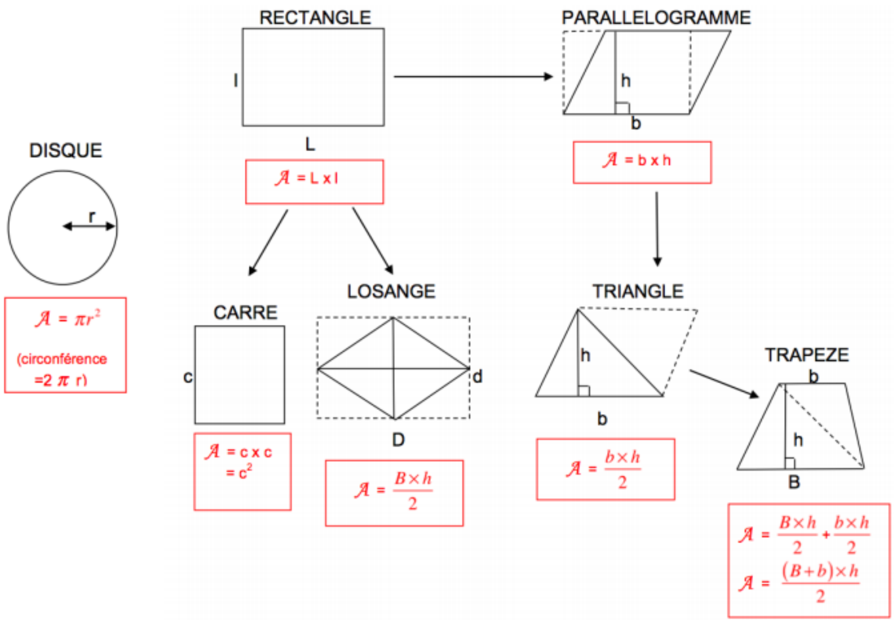
Propriété 12.2.3 La section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à sa base est un rectangle.



12.3 Volumes et aires connues

12.3.1 Les formules





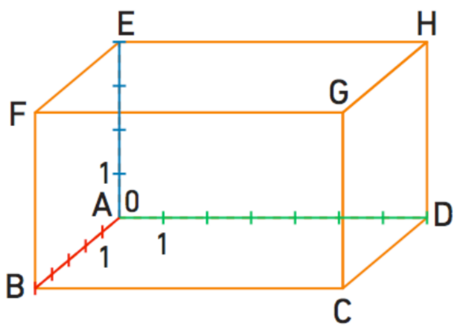
12.3.2 Agrandissement et réduction

Propriété 12.3.1 Pour un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- les longueurs sont multipliées par k
- les aires sont multipliées par k^2
- les volumes sont multipliées par k^3

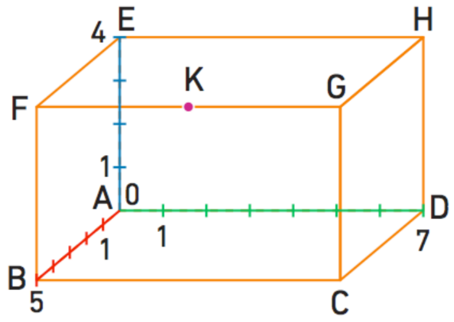
12.4 Se repérer dans l'espace

12.4.1 Dans un parallélépipède

Un parallélépipède peut définir un repère de l'espace. Il faut choisir une origine (ici le point A) et trois axes gradués définis à partir des dimensions du parallélépipède : abscisse (AD) – ordonnée (AB) – altitude (AE)



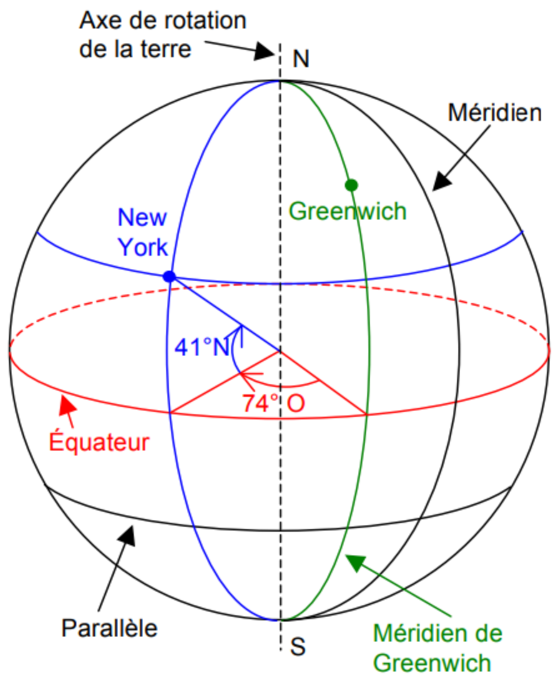
Exercice 12.1 On donne le repère de l'espace représenté ci-dessous défini à partir du parallélépipède $ABCDEFGH$. Donner l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude des sommets du parallélépipède et du milieu K du segment $[FG]$.



■

12.5 Sur la Terre

Pour trouver un point sur terre, on utilise la lattitude et la longitude qui prennent comme origine le méridient de Greenwich et le centre de la Terre.



Dans ce cas les coordonnées de New York est $(74°O; 74°N)$. On donne toujours en premier la longitude puis la lattitude. Si on ne précise par la direction d'une lattitude, elle est positive au nord de l'équateur et négative sinon. De même une longitude est positive à l'est de greenwich et et négative sinon.

13. Transition 3-2 : Les relatifs

13.1 Les sources d'erreur

La plupart des erreurs sur les relatifs proviennent d'une confusion entre les règles. Cette confusion provient d'inexactitudes dans l'apprentissage de ces dernières. On entend souvient :

- "Moins et moins ça fait plus"
- "Moins et plus ça fait moins"

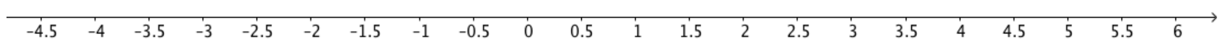
De ce genre de raccourci nait un paquet d'erreurs. En effet le "et" de la langue francaise est associé à l'addition alors que ce semblant de règle est valable uniquement pour la multiplication et la division. Votre premier travail doit être un travail de rigueur. Vous devez vous forcer à retenir l'intégralité de la règle et non une version abrégée inexacte.

13.2 Les règles

13.2.1 L'addition

Définition 13.2.1 — Distance à zéro. La distance à zéro d'un nombre relatif est la distance entre ce nombre et zéro sur une droite graduée.

Exemple 13.2.1 Distance à zéro



- La distance à zéro de -4 est 4
- La distance à zéro de 3,5 est 3,5
- La distance à zéro de -2 est 2

Propriété 13.2.1 Pour additionner deux nombres de même signe :

- on garde ce signe
- on ajoute les distance à zéro

Propriété 13.2.2 Pour additionner deux nombres relatifs de signes différents :

- on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro
- on soustrait les distances à zéro : la plus grande moins la plus petite

Exercice 13.1 Effectuer les calculs suivants :

- $(-6)+4$

- $9+(-14)$

- $(-4)+(+9)$

Propriété 13.2.3 Simplification d'écriture.
On peut simplifier l'écriture d'une expression comme ceci :
- $(-6)+4 \to -6+4$
- $9+(-14) \to 9-14$
- $(-4)+(+9) \to -4+9$
- $(-4)-(-9) \to -4+9$

Exercice 13.2 Effectuer les calculs suivants :

- $A=-3+(-4)$
- $B=-60+30$
- $C=-9-10$
- $D=4+(-6)$
- $E=-20+(-2)$
- $F=-6+2-20$
- $G=-7-10+3$
- $H=6-20-10$

13.2.2 La multiplication et la division

Propriété 13.2.4 Le produit (respectivement le quotient) de deux nombres relatifs est un nombre :

- positif si le deux nombres ont le même signe
- négatifs si les nombres sont de signes contraires

La distance à zéro du résultat est égale au produit (respectivement quotient) des distances à zéro des deux nombres.

Exercice 13.3 Effectuer les calculs suivants :

- $(-2) \div (-4)$
- $6 \times (-14)$
- $(-36) \div 9$
- 4×6

Exercice 13.4 Effectuer les calculs suivants :

- $A = -3 \times (-4)$
- $B = -6 \times 3$
- $C = -9 \times (-10)$
- $D = 4 \times (-6)$
- $E = -20 \div (-2)$
- $F = -6 \div 2 - 20$
- $G = -7 - 10 \times 3$
- $H = 6 \times (-20) \times (-10)$

13.3 Exercices

Exercice 13.5 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Trouver deux nombres de signes contraires dont le produit est -12.
2. Trouver deux nombres négatifs dont le quotient est $3,5$.
3. Trouver deux nombres de signes contraires sont le quotient est -4.
4. Trouver trois nombres qui n'ont pas tous le même signe dont le produit est -60.

Exercice 13.6 Effcetuer les calculs suivants :

- $A = (-8) + (-6) \times (-3)$
- $B = -6 \div (-3) - 4 \times (-2)$
- $C = 7 + (-6 + 15) \times (-6)$
- $D = -9 \times (-6 - 8)$

Exercice 13.7 Voici la copie d'un élève. Corriger ses éventuelles erreurs :

- $-9 \times (-5) = -45$
- $24 \div (-6) = -4$
- $12 - (-8) = -4$
- $6 \times (-5) + 10 = -20$
- $9 + 6 \div (-3) = -5$
- $15 \div (-3) + 10 = 5$

Exercice 13.8 Soit un nombre x. Le multiplier par (-5) puis ajouter 10 au résultat.

1. Ecrire la formule associé au programme ci-dessus.
2. Exécuter le programme pour $x = 3$ et $x = -4$

3. Le programme a été exécuté plusieurs fois et ont a trouvé : $10; 45; 7,5$ et $-2,5$. Pour quelles valeurs de x a-t-on effectué ces calculs ?

14. Transition 3-2 : Les fractions

14.1 Règles de calculs

14.1.1 Règle pour la multiplication.

La multiplication est la plus simple des opérations avec les fractions.

Propriété 14.1.1 Soit a, b, c et d quatre entiers tel que $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exercice 14.1 Calculer les produits suivants puis simplifier le résultat obtenue :

- $A = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \ldots$
- $B = \frac{-4}{7} \times \frac{9}{2} = \ldots$
- $C = \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-5} = \ldots$
- $D = \frac{70}{15} \times \frac{3}{10} = \ldots$
- $E = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{2} = \ldots$
- $F = \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-5} \times \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-5} = \ldots$

14.1.2 Règle pour la division.

Définition 14.1.1 — Inverse d'une fraction. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction, linverse de cette fraction est la fraction $\frac{b}{a}$.

Propriété 14.1.2 Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse. Donc :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple 14.1.1

$$A = \frac{-3}{2} \div \frac{7}{-5}$$

$$A = \frac{-3}{2} \times \frac{-5}{7}$$

$$A = \frac{-3 \times (-5)}{2 \times 7}$$
$$A = \frac{15}{14}$$

Exercice 14.2 Calculer les quotients suivants puis simplifier le résultat obtenue :

- $A = \frac{3}{2} \div \frac{4}{5} = \ldots$
- $B = \frac{-4}{7} \div \frac{9}{2} = \ldots$
- $C = \frac{-7}{4} \div \frac{1}{-5} = \ldots$
- $D = \frac{70}{15} \div \frac{3}{10} = \ldots$
- $E = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} \div \frac{9}{2} = \ldots$
- $F = \frac{-7}{4} \div \frac{1}{-5} \times \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-5} = \ldots$

Propriété 14.1.3 Prendre une fraction d'une quantité c'est multiplier la fraction par la quantité.

Exemple 14.1.2 Un gâteau pèse 360g. Paul en mange les deux tiers. Quelle quantité Paul, a-t-il mangé ?.
Pour résoudre ce petit problème on doit calculer les deux tiers de 360 soit :

$$\frac{2}{3} \times 360 = \frac{2 \times 360}{3} = \frac{720}{3} = 240$$

Paul a mangé 240g de gâteau.

Exercice 14.3 Résoudre les problèmes suivants :

1. Amélie a dépensé les cinq septièmes de ses économies qui s'élevaient à 14,70 €. Calculer le montant de sa dépense.

2. Dans une classe de 30 élèves, les deux cinquièmes sont des filles. Calculer le nombre de fille de cette classe.

Définition 14.1.2 — Pourcentage. On appelle pourcentage toute fraction dont le dénominateur est 100. Afin de faciliter l'écriture on utilise le signe %.

$$\frac{42}{100} = 42\%$$

R Un pourcentage est une fraction particulière, il obéit aux mêmes règles que les fractions.

Exercice 14.4 Dans un collège comptant 425 élèves, 36 % sont externes. Combien d'élèves sont des externes ?

■

Propriété 14.1.4 Prendre la fraction d'une fraction, c'est multiplier les fractions entre elles.

Exemple 14.1.3 Dans un club de sport deux cinquième des adhérent pratiquent le surf et cinq septième des surfeurs sont des filles. Quelle la proportion des adhérents qui sont des filles et qui pratique le surf ?

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$\frac{10}{21}$ des filles du club pratiquent le surf.

R Ca marche aussi avec les pourcentages.

Exercice 14.5 En france, 92% de la population possède un téléphone portable. 14,5% des téléphones en service sont des iphones. Déterminer le pourcentage de français possédant un iphone.

■

14.1.3 Règles pour l'addition et la soustraction.

Autant la multiplication de deux fractions est un opération simple. Il n'en est pas de même pour l'addition ou la soustraction de deux fractions.

Propriété 14.1.5 Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ deux fractions ayant le même dénominateur alors :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

De même :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Propriété 14.1.6 Pour additionner ou pour soustraire deux fractions, il est indispensable qu'elles soient sur le même dénominateur.

Exemple 14.1.4 On veut réaliser le calcul suivant :

$$A=\frac{7}{3}+\frac{5}{4}$$

Nous allons transformer les fractions $\frac{7}{3}$ et $\frac{5}{4}$ afin qu'elles aient le même dénominateur. Ce dénominateur commun est 12 car il est à la fois dans la table de 3 et dans la table de 4. Pour transformer la fraction $\frac{7}{3}$ en une fraction sur 12 on la multiplie par $\frac{4}{4}$, de même pour transformer la fraction $\frac{5}{4}$en une fraction sur 12 on la multiplie par $\frac{3}{3}$ ce qui donne :

$$A=\frac{7}{3}\times\frac{4}{4}+\frac{5}{4}\times\frac{3}{3}$$
$$A=\frac{28}{12}+\frac{15}{12}$$

Les deux fractions sont sur le même dénominateur, on peut donc les additionner.

$$A=\frac{28+15}{12}$$

$$A=\frac{43}{12}$$

Exercice 14.6 Effectuer les calculs suivants puis simplifier le résultat obtenue :

- $A=\frac{3}{2}+\frac{4}{5}=\dots$
- $B=\frac{-4}{7}+\frac{9}{2}=\dots$
- $C=\frac{-7}{4}+\frac{1}{-5}=\dots$
- $D=\frac{70}{15}+\frac{3}{10}=\dots$
- $E=\frac{3}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{9}{2}=\dots$

- $F = \frac{-7}{4} + \frac{1}{-5} + \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-5} = \ldots$

14.2 Comparaison de fraction et manipulation de parts

Propriété 14.2.1 Afin de comparer deux fractions, on les met sur le même dénominateur et on compare ensuite les numérateurs.

Exemple 14.2.1 Comparer les fractions $\frac{8}{20}$ et $\frac{3}{7}$.
Dans un premier temps on va mettre les deux fractions sur $20 \times 7 = 140$.

$$\frac{8}{20} \times \frac{7}{7} = \frac{56}{140}$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{140}$$

56 est inférieur à 60 donc $\frac{8}{20} < \frac{3}{7}$.

Exercice 14.7 Comparer les fractions suivantes :

- $\frac{9}{7}$ et $\frac{12}{10}$

- $\frac{-3}{4}$ et $\frac{-9}{11}$

Propriété 14.2.2 Dans un problème de partage, la fraction 1 ou $\frac{1}{1}$ correspond à l'intégralité de la quantité à partagée.

Exemple 14.2.2 Paul a mangé un quart d'un gateau et Rémi mangé deux tiers du même gâteau. Quelle part reste-t-il ?

1. Dans un premier temps, nous allons calculer la fraction du gâteau mangée par Rémi et Paul.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

A eux deux, Paul et Rémi ont mangé $\frac{7}{12}$ du gâteau.

2. Pour déterminer la part de gâteau restante on calcule :

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Il reste $\frac{5}{12}$ du gâteau.

Exercice 14.8 La surface de la Terre est constituée d'eau et de continents. Sachant que $\frac{29}{100}$ de la surface est recouverte de continents. déterminer la part recouverte par les océans.

Exercice 14.9 Une course comporte six épreuves : course, canoë, course d'orientation, bike and run, rollet et VTT. $\frac{1}{15}$ se fait en courant. $\frac{1}{10}$ de la distance en canoë. La course d'orientation représente $\frac{1}{15}$ de la distance totale. L'épreuve de bike and run représente $\frac{1}{5}$ et l'épreuve de roller $\frac{1}{4}$.
Déterminer la fraction de la distance que représente l'épreuve de VTT.

15. Transition 3-2 : Puissances

15.1 Définitions et notations

Définition 15.1.1 — Puissance. a désigne un nombre relatif et n un nombre entier. Le produit $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$ de n facteurs égaux à a est une puissance de a et est notée a^n.

R Voici quelques cas particuliers :
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- a^2 se lit a au carré
- a^3 se lit a au cube

Exercice 15.1 Calculer les puissances suivantes :
- 3^5

- $(-2)^3$

- 10^4

Définition 15.1.2 — Puissance d'un exposant négatif. a désigne un nombre relatif non nul et n un entier. a^{-n} désigne l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

R $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

Exercice 15.2 Calculer les puissances suivantes :
- 3^{-2}

- $(-2)^{-3}$

- 10^{-4}

15.2 Règles de calcul

Propriété 15.2.1 Soit a et b deux nombres et n et p deux entiers alors :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $(a^n)^p = a^{n \times p}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exercice 15.3 Ecrire sous la forme d'une puissance de 5.

- $A = 5^4 \times 5^2$
- $B = 5^5 \times 5^{-2}$
- $C = \dfrac{5^5}{5^3}$
- $D = (5^4)^4$
- $E = (5^{-4})^3$
- $F = \dfrac{5^7 \times 5^{-3}}{5^2 \times 5^5}$

15.3 Ecriture scientifique

Définition 15.3.1 — Ecriture scientifique. Écrire un nombre décimal en écriture scientifique, c'est l'écrire sous la forme suivante :

$$a \times 10^n$$

avec a un nombre décimal compris entre 1 et 10 (exclu) et n un entier relatif.

Exemple 15.3.1 Voici quelques exemples d'écriture scientifique :
- $200 = 2 \times 100 = 2 \times 10^2$
- $3500 = 3,5 \times 1000 = 3,5 \times 10^3$
- $25800000 = 2,58 \times 10000000 = 2,58 \times 10^7$
- $0,02 = 2 \times 0,01 = 2 \times 10^{-2}$
- $0,00038 = 3,8 \times 0,0001 = 3,8 \times 10^{-4}$

Exercice 15.4 Convertir les nombres suivants en écriture scientifique :
- 458000000
- 0,00000546

- 25

Exercice 15.5 Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'écriture scientifique.

- $A = 2,8 \times 10^6 \times 3 \times 10^{12}$
- $B = \dfrac{4,2 \times 10^4}{3 \times 10^{-5}}$

15.4 Problèmes

Sans Calculatrice

Exercice 15.6 L'aire globale de la Terre est d'environ $5 \times 10^8\ km^2$. L'aire des océans est d'environ $3,5 \times 10^8\ km^2$.

1. Déterminer la surface de terre émergée.
2. Déterminer le poucentage que représente les océans par rapport à la surface globale de la Terre.

Exercice 15.7 A la naissance, notre cerveau est constitué d'environ cent milliards de neurones, chacun d'entre eux étant connecté à dix mille de ses semblables.

1. Ecrire le nombre de neurone d'un cerveau d'un nouveau né en écriture scientifique.

2. Déterminer le nombre de connexions dans un cerveau. Le résultat sera donné en écriture scientifique.

Les notions de racine carré et de puissance sont étroitement liée. Nous rappelerons donc dans un premier temps les propriétés des puissances.

15.5 La racine carré

Définition 15.5.1 — Racine carré. Pour nombre $a \geq 0$, on note $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

R Faisons un petit retour, sur le théorème de Pythagore. Lorsqu'à la fin de l'utilisation de ce théorème vous tombiez sur :

$$AB^2 = 12$$

Alors on trouvait :

$$AB = \sqrt{12}$$

Maintenant que vous êtes plus savant nous allons voir pourquoi et comment ça marche. Faisons la même opération mais avec plus d'étapes pour comprendre :

$$AB^2 = 12$$

Une égalité reste vraie si on applique les mêmes modifications sur les des membres (côtés) de l'égalité.

$$\begin{aligned} AB^2 &= 12 \\ \sqrt{AB^2} &= \sqrt{12} \\ (AB^2)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{12} \\ AB^{2\times\frac{1}{2}} &= \sqrt{12} \\ AB^1 &= \sqrt{12} \\ AB &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

Tous ces détails de rédaction sont évidemment superflus dans le cas d'une résolution d'exercice mais elles vous permettent de comprendre comme la racine carré permettait de faire "disparaitre" le carré.

Maintenant que vous savez d'une racine carré est une puissance, la racine carré hérite donc de toutes les propriétés des puissances. Nous allons donc reprendre les propriétés et les appliquer à la racine carré :

Propriété 15.5.1 Voici les propriétés fondamentales des puissances.

1. $a^n \times b^n = (ab)^n$ pour les racines carrés ont a donc : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$
2. $(a^n)^p = a^{n \times p}$ pour les racines carrés ont a donc : $(\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$

Exemple 15.5.1 Voici quelques exemples d'utilisations de ces propriétés. :

- On peut multiplier deux racine carrées :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

- Nous allons développer $A = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$.

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$$

$$A = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$$
$$A = 3 + 2 \times \sqrt{3 \times 7} + 7$$
$$A = 10 + 2\sqrt{21}$$

- On peut simplier l'écriture d'une racine carrée en faisant apparaitre des carrés grâce à la décomposition :

$$\sqrt{75} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Exercice 15.8 Simplifier le plus possibles les racines suivantes :

1. $\sqrt{192}$
2. $\sqrt{162}$
3. $\sqrt{175}$

Exercice 15.9 Développer les expressions suivantes :

1. $A = (\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$

2. $B = (x - \sqrt{7})^2$

3. $C = (\sqrt{2}x - \sqrt{7})^2$

4. $D = (\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7})$

16. Transition 3-2 : Calcul littéral 1

16.1 Résolution d'équation

Une équation représente une situation d'équilibre entre deux membres.

- Le membre de droite (situé à droite du $=$)
- Le membre de gauche (situé à gauche du $=$)

On note dans une équation la présence d'une inconnue (élément dont on ne connait pas la veleur) symbolisé par une lettre le plus souvent x.

Résoudre une équation consiste à déterminer la ou les valeurs de x. Pour résoudre une équation il y a **une seule règle** :

- Afin de conserver l'égalité et dont l'équilibre, toute opération effectuée sur un membre de l'équation doit aussi être effectuée sur l'autre membre de.

Exercice 16.1 Déterminer les opérations à effectuer pour résoudre chacunes de ces équations :

1. $6x = 24$

2. $\frac{x}{4} = 12$

3. $x - 6 = 24$

4. $x + 4 = 24$

■

R Dans l'exercice précédent une seule opération suffisait. Voyons maintenant des équation un peu plus complexes.

Exercice 16.2 Déterminer les opérations à effectuer pour résoudre chacunes de ces équations :

1. $6x - 4 = 24$

2. $\dfrac{x}{4}+4=22$

3. $-2x-6=24$

4. $7x-4=24$

R Nous pouvons encore compléxifier les équations mais le principe reste toujours le même. Je vous le rappel toute opération est valide tant que vous l'appliquée aux deux membres de l'équation.

Exercice 16.3 Résoudre les équations suivantes :

1. $6(x-4)+12=24$

2. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{3}=22$

3. $-2x-6=6x+24$

4. $7x-4-2(x+3)=-6x+24$

16.2 Développement

16.2.1 La distributivité simple

Propriété 16.2.1 Pour tout nombres k, a et b :

$$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$$

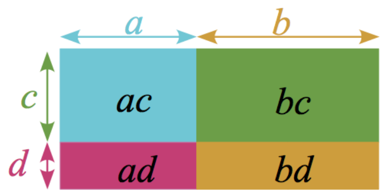
$$k\times(a-b)=k\times a-k\times b$$

Exercice 16.4 Développer et réduire les expressions suivantes :
- $3,5(2x+3)=\dots$
- $-6(-5x+3)=\dots$
- $-2(5x-4)+3x-2=\dots$

16.2.2 La double distributivité

Propriété 16.2.2 Pour tous nombres a, b, c et d :

$$(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$$



Exercice 16.5 Développer les expressions suivantes :
- $A=(2x+3)\times(6x-2)$

- $(-5x+3)\times(2x-3)$

Exercice 16.6 Développer les expressions suivantes :

- $A=-3(x+4)+(2x-6)(-8x+4)$
- $B=7(4x-4)-8(-4x-2)$
- $C=(6x-6)(-2x+3)+(6x+2)(-2x-1)$
- $D=-2(6x-1)(2x+3)$
- $E=6x^2+4x-(4x^2+2x-6)$

16.3 Factorisation

La factorisation est l'opération inverse du développement. Elle va nous permettre de simplifier très fortement des expressions.

Propriété 16.3.1 Pour tout nombres k, a et b :

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

k est appelé le facteur commun.

Exercice 16.7 Cette expression est factorisable par $(n+2)$. A vous de jouer.

$$A = \frac{5n-10}{5} + 2(n+2)$$

Exercice 16.8 Factoriser les expressions suivantes :

- $A = 3(x+2) + 6x + 12$
- $B = 6(3x-4) + 12x - 16$
- $C = \dfrac{12x-4}{7} + 3x - 1$

Exercice 16.9 Factoriser les expressions suivantes :

1. $(3x+7)(2x-4)+(3x+7)(4x+2)$

2. $(2x-5)^2-(2x-5)(6x-1)$

3. $6x(x-2)-(x-2)(x-3)$

4. $(15x-5)(2x+9)-(3x-1)(4x-1)$

5. $(3x-7)(3x+7)-(3x-7)(2x+11)$

6. $(x-2)^2-(x-2)(3x+4)$

16.4 Méthode des identités remarquables

Méthode 7 — Des identités remarquables. Lorsque l'on ne repère pas un facteur commun, il peut y avoir une identité remarquable :

$$\boxed{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$

$$\boxed{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Il s'agit alors de repérer quelle identité utiliser puis d'identifier a et b pour factoriser en utilisant les formules ci-dessus.

Poursuivons avec quelques exemples :

Exemple 16.4.1 Factorisons les expressions suivantes :

1. $x^2-22x+121$
   On reconnaît la deuxième identité remarquable avec $a^2=x^2$ donc $a=x$ puis $2\times a\times b=2\times x\times 11$ donc $b=11$. Il reste alors 121 qui correspond bien à 11^2. Nous pouvons par conséquent écrire :
   $$x^2-22x+121=(x-11)^2$$
2. $36x^2-64$.
   Après avoir remarqué que $36x^2$ n'est pas un carré (seul le x est mis au carré), on écrit :
   $$36x^2-64=(6x)^2-8^2=(6x-8)(6x+8)\text{ en utilisant la troisième identité}$$
3. $9x^2+24x+16=(3x)^2+2\times 3x\times 4+4^2=(3x+4)^2$

Ces exemples sont volontairement largement détaillés. Rien ne vous empêchera lors de vos examens de laisser moins d'étapes de calculs (si toutefois vous n'écrivez pas directement le résultat).

Exercice 16.10 Factoriser les expressions suivantes :

1. $A(x) = 9x^2 + 42x + 49$

2. $B(x) = 25x^2 - 60x + 36$

3. $C(x) = 9x^2 - 64$

17. Transition 3-2 : Second degré

17.1 Définition

Définition 17.1.1 — Trinôme de second degré. On appelle trinôme du second degré toute équation du type $ax^2+bx+c=0$ avec a,b et c des nombres et $a\neq 0$

Exemple 17.1.1 Voici deux exemples de trinôme du second degré :
- $6x^2-6x+2=0$
- $-5x^2+4=0$

Exercice 17.1 Parmis les expressions suivantes, entourer les trinômes du second degré :
- $6x^2+4x+4=9$
- $-6x^2+4=0$
- $9x+4x+4=0$
- $6x^2+4x+4=12x^2$
- $-6x^2-4x+4=0$

■

R Quelque soit votre niveau de mathématiques, on en pas résoudre directement ces équations. Il faut les factoriser en deux éléments du premier degré puis appliquer la règle du produit nul : Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

17.2 Méthode de résolution

Propriété 17.2.1 Un produit de facteur est nul si et seulement un des facteurs est nul. Autremenent si $a\times b=0$, $a=0$ ou $b=0$.

R Il ne faut pas foncer tête baissée dès que vous voyez une équation. Dans le cas de l'équation suivante :

$$(9x+4)(-4x+1)=0$$

Si on développe, on va faire apparaitre des termes en x^2 et on est foutu. Il faut donc conserver la forme factorisée. En général, le développement d'une expression est la dernière solution à adopter.

Exercice 17.2 En utilisant la propriété précédente, résoudre les équations suivantes :
- $(6x-4)(2x+1)=0$

- $(2x+11)(4x+1)=0$

- $(-2x-4)(x+1)=0$

- $2x(6x+14)=0$

Parfois il est nécessaire de factoriser afin de construire l'équation produit nul.

Exercice 17.3 Résoudre les équations suivantes :

- $(2x+1)(6x-6)+(2x+1)(5x-4)=0$

- $(3x-6)(5x-3)-(3x-6)(3x+9)=0$

- $(6x-4)(7x-2)=-4(6x-4)(9x+2)$

Exercice 17.4 Il n'y a pas que le facteur commun comme méthode de factorisation.

$x^2+4x+1=0$

$(2x+6)^2-(6x+2)^2=0$

Les exercices sur ce thème se ressemblent terriblement. Encore un série et c'est bon.

Exercice 17.5 Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-5)(4x+5)-(4x+5)(2x+7)=0$

2. $(6x-11)^2+(6x-11)=0$

3. $36x^2-144=0$

4. $4x^2+40x+25=0$

5. $9x^2-6x+1=0$

6. $(x-2)(3x+4)+x^2-4=0$

7. $A(x) = (2x-5)(7+3x) - (4x^2 - 20x + 25) = 0$

8. $D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2 = 0$

18. Repérage dans le plane

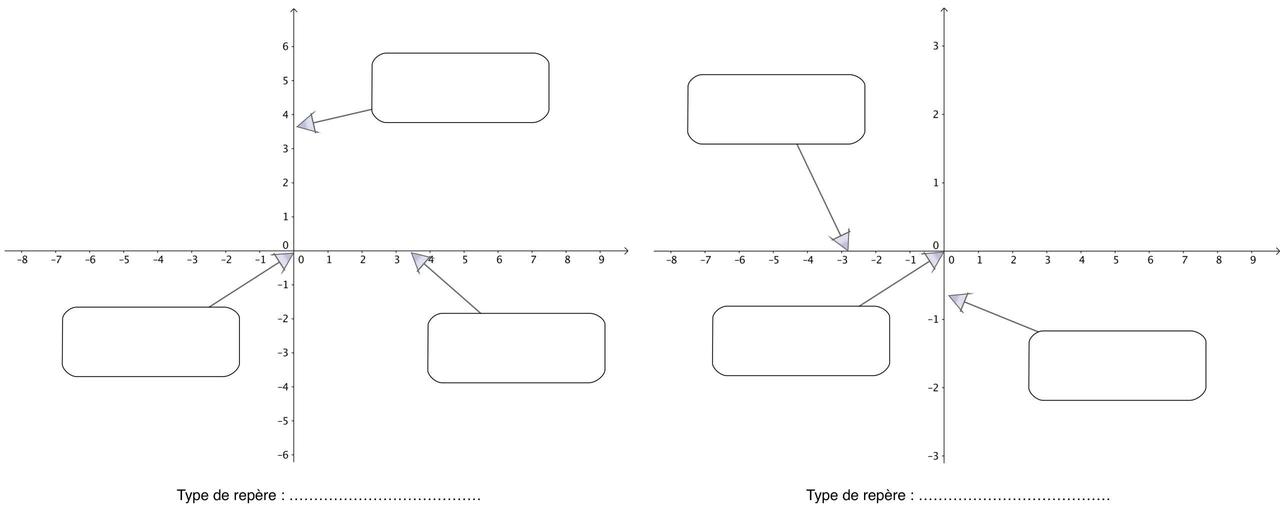
18.1 Définitions

Définition 18.1.1 — Repère. Un repère du plan est formé de deux axes, ayant la même origine. Sur chacun de ces axes ont été définis une unité et un sens positif (flèche).

- Si les deux axes sont perpendiculaires, le repère est dit orthogonal.
- Si les deux axes sont perpendiculaires et ont la même unité, le repère est dit orthonormé.

L'axe horizontale est appelé axe des abscisses. L'axe verticale est appelé axe des ordonnées.

Exercice 18.1 Pour les deux repères suivants, nommer les éléments fléchés et donner le type de repère.

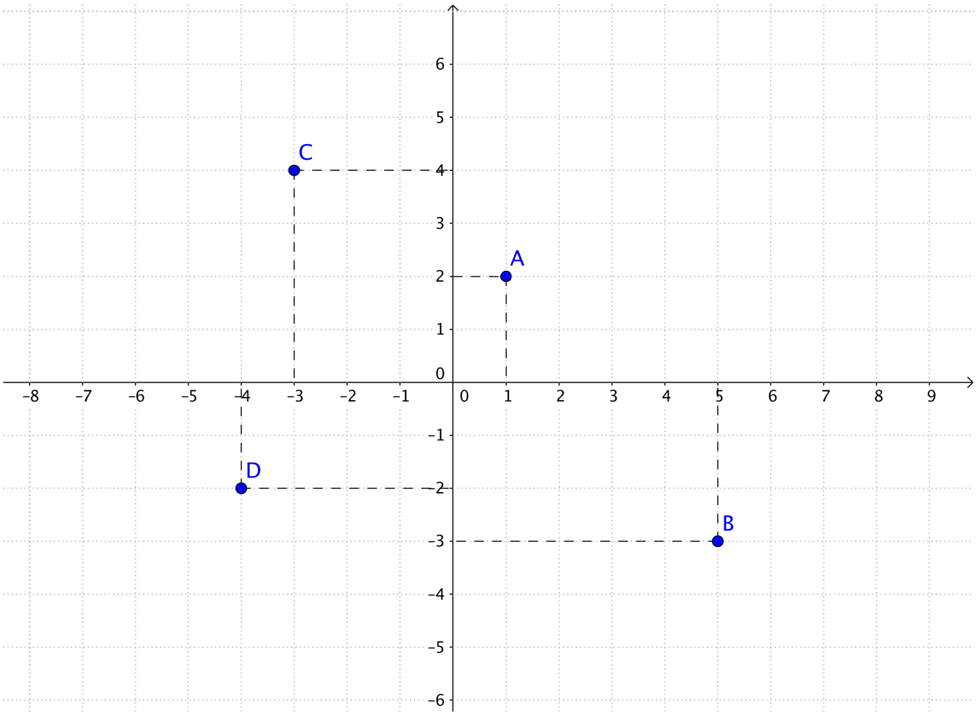


Définition 18.1.2 — Coordonnées. Dans un repère du plan, on a besoin de deux nombres pour indiquer la position d'un point : ce sont ses coordonnées.

- La première coordonnée, l'abscisse, se lit sur l'axe horizontal (l'axe des abscisses).
- La seconde, l'ordonnée, se lit sur l'axe vertical (l'axe des ordonnées).

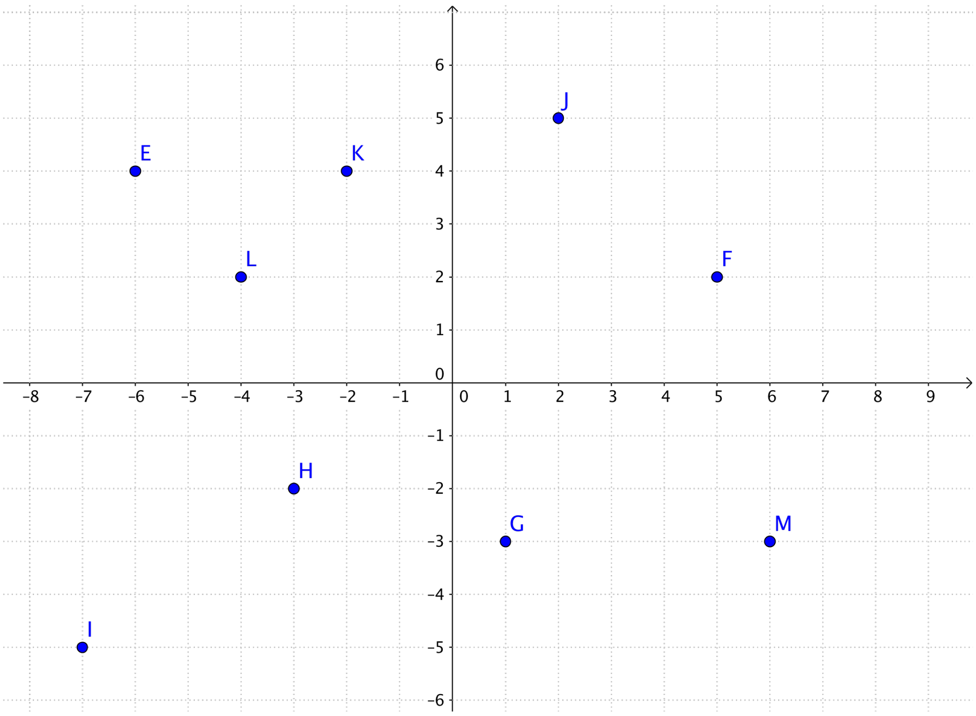
On note x_A l'abscisse du point A et y_A l'ordonnée du point A. Les coordonnées du point A sont notées $(x_A; y_A)$

Exemple 18.1.1 On dispose du repère ci-dessous, sur lequel on a placé quatre points.



- $x_A = 1$ et $y_A = 2$. Les coordonnées du points sont donc notée $A(1;2)$
- $x_B = 5$ et $y_B = -3$. Les coordonnées du points sont donc notée $B(5;-3)$
- $x_C = -3$ et $y_C = 4$. Les coordonnées du points sont donc notée $C(-3;4)$
- $x_D = -4$ et $y_D = -2$. Les coordonnées du points sont donc notée $D(-4;-2)$

Exercice 18.2 Donner les coordonnées des points du plan.



■

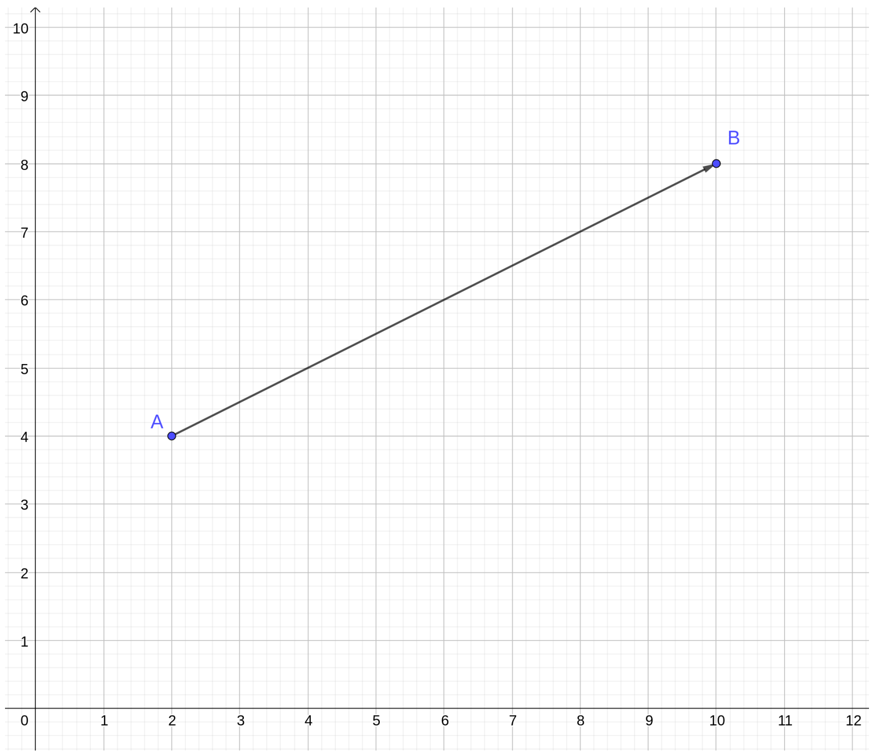
18.2 Notion de vecteur

Le notion de vecteur est clef en classe de seconde. Prenons donc un peu d'avance. Vous verrez en classe, la définition propre d'un vecteur par le triplet :

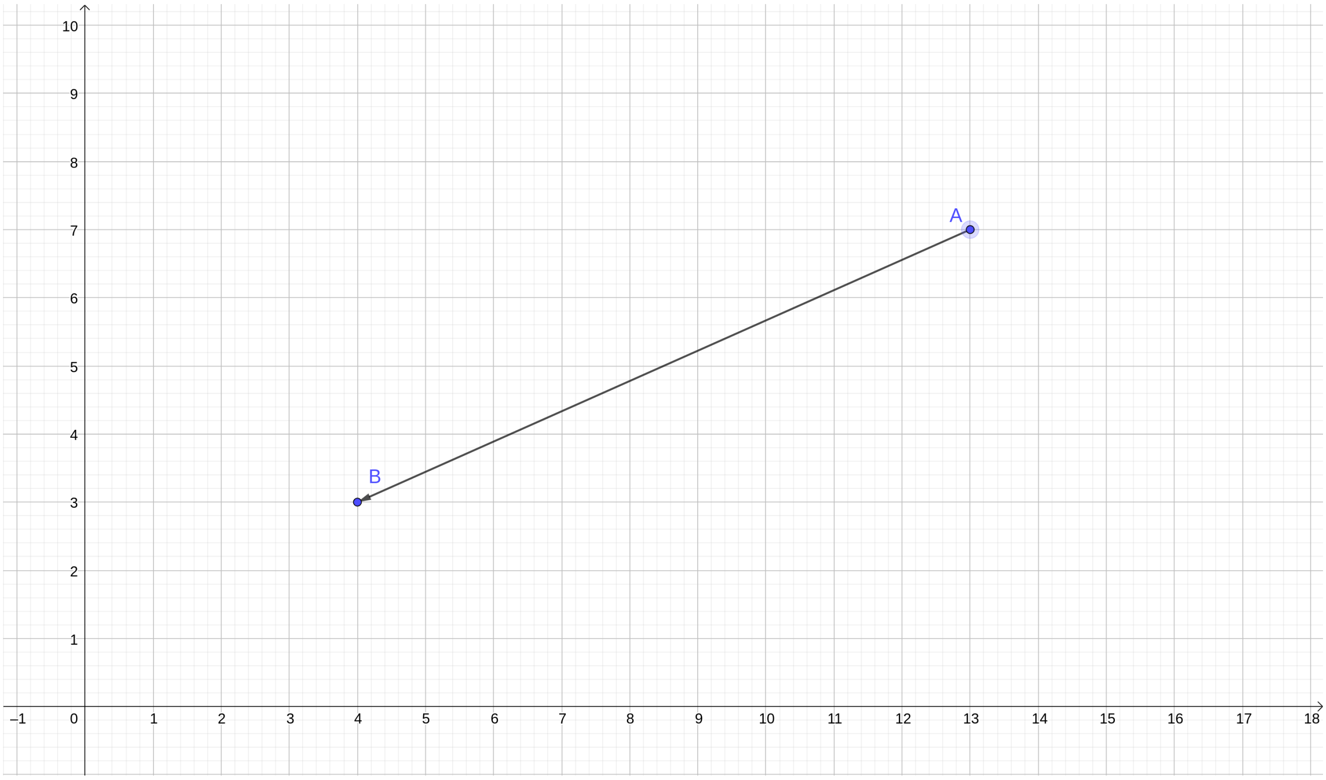
- Sens
- Direction
- Norme

Dans cette partie, nous allons seulement nous interresé aux coordonnées d'un vecteur et à sa signification.

Activité 18.1 Décrire le chemin pour aller de A à B en utilisant seulement des déplacements sur les abscisses et les ordonnées.



Même question avec une autre configuration :

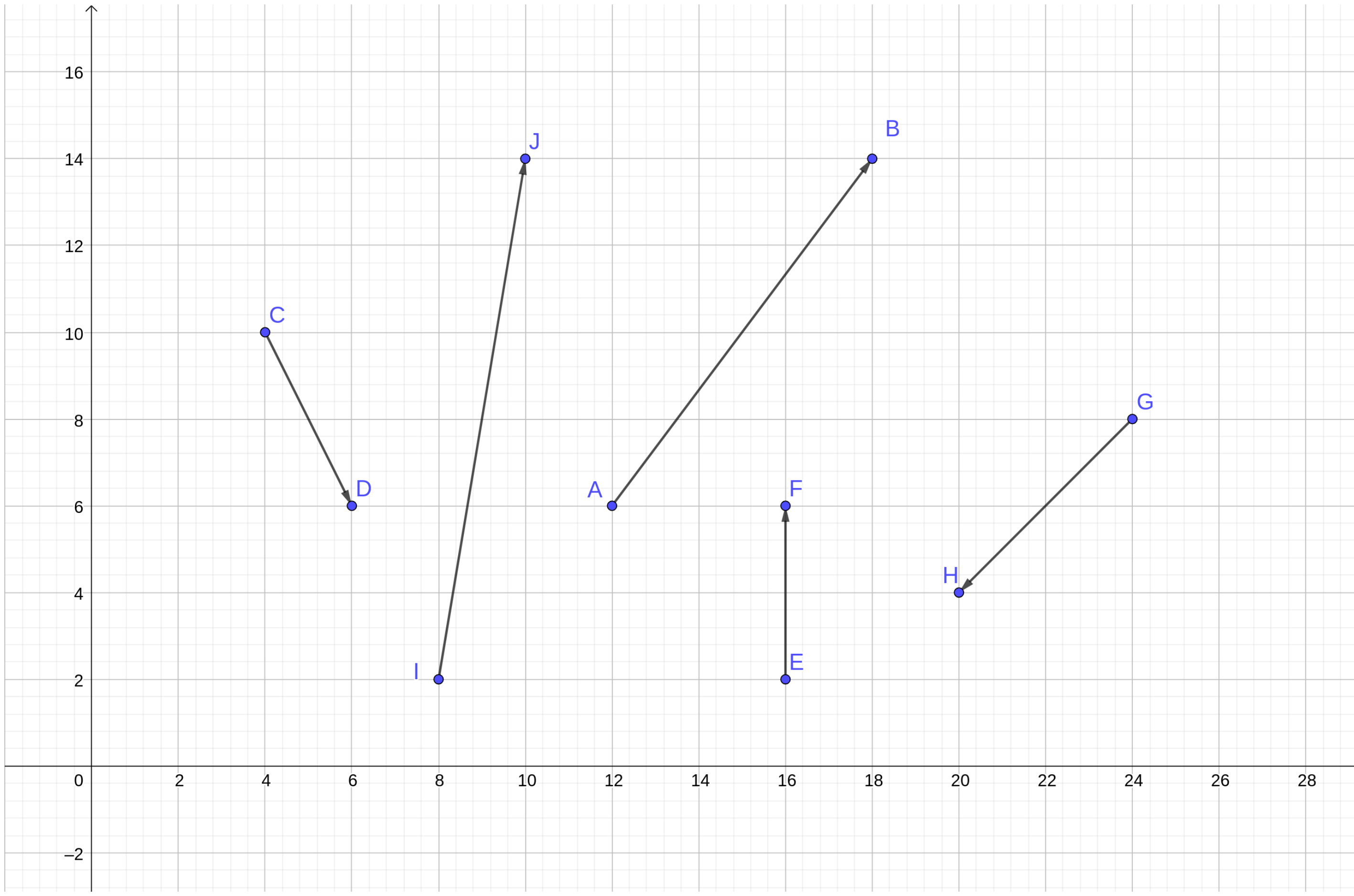


Exercice 18.3 Compléter le texte à trous suivant : Sur un repère avec une orientation classique :

- Un déplacement de $+3$ sur l'axe des abscisses correspond à déplacement de 3 unités vers la ...
- Un déplacement de -6 sur l'axe des abscisses correspond à déplacement de ... unités vers ...
- Un déplacement de $+2$ sur l'axe des abscisses correspond à déplacement de ... unités vers ...
- Un déplacement de -4 sur l'axe des abscisses correspond à déplacement de ... unités vers ...

Définition 18.2.1 — Vecteur. Soit deux point A et B, on appelle vecteur de A vers B noté $\overrightarrow{AB}$ le déplacement de A vers B. Un vecteur possède de coordonnées qui correspond aux déplacements sur l'axe des abscisses et des ordonnées pour aller de A vers B.

Exercice 18.4 Donner les coordonnées des vecteurs suivants :

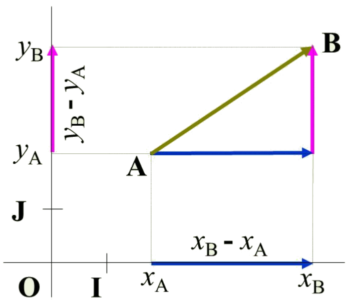


- Les coordonnées sur vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}(3;4)$
- Les coordonnées sur vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont : $\overrightarrow{CD}(1;-2)$
- Les coordonnées sur vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont : ...
- Les coordonnées sur vecteur $\overrightarrow{GH}$ sont : ...
- Les coordonnées sur vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont : ...

Compter les carreaux c'est rigolo, mais il y a plus rapide.

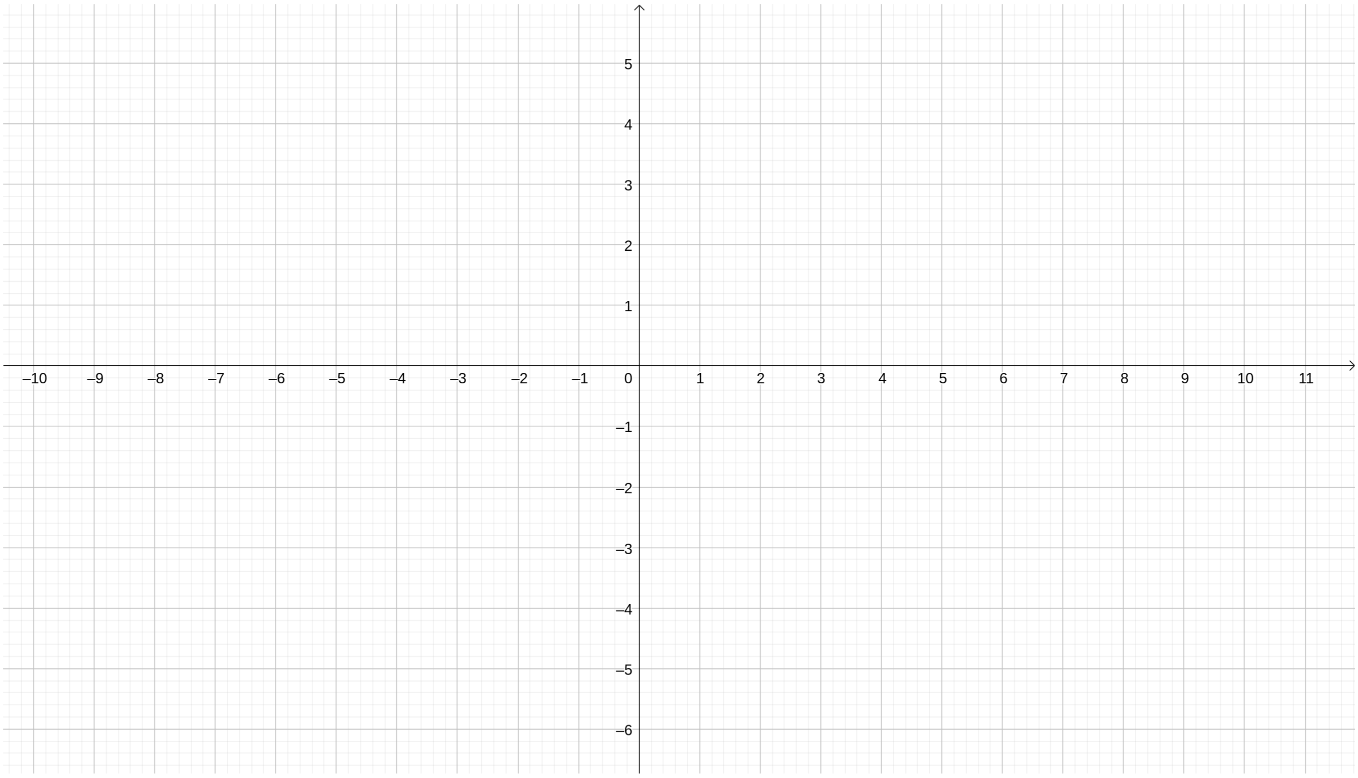
Propriété 18.2.1 Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$



Exercice 18.5 Reproduire ou compléter le repère suivant en plaçant les points suivants :

- $A(-6,4;4,4)$
- $B(-2,5;3,4)$
- $C(8,2;-4,9)$
- $E(6;4)$
- $F(-2,5;-4,4)$



Puis déterminer,à l'aide de la formule, les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{CD}$

- $\overrightarrow{DA}$

- $\overrightarrow{FE}$

- $\overrightarrow{CF}$

19. Transition 3-2 : Les fonctions

19.1 Définitions

Définition 19.1.1 — Fonction. Une fonction est une procédure permettant d'associer deux grandeurs. On note habituellement une fonction par la lettre f.

Propriété 19.1.1 Si f est une fonction qui au nombre x, associe le nombre y, on note $y = f(x)$ (lire f de x) ou $f : x \mapsto f(x)$ (lire f qui à x associe $f(x)$).
On dit que y ou $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de y ou $f(x)$ par f.

Exercice 19.1 Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité.
Exemple : "L'image de 2 par la fonction f est 3" se traduit par : $f(2) = 3$.

1. L'image de 4 par la fonction f est 2.

2. -45 est l'image de -3 et de 4 par la fonction g.

3. 3 est l'antécédent de 4 par la fonction h.

4. Le point $A(3;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

■

Exercice 19.2 Traduire chacune des égalités suivantes par deux phrases distinctes : l'une utilisant le mot image et l'autre le mot antécédent.

1. $f(-1) = 2$

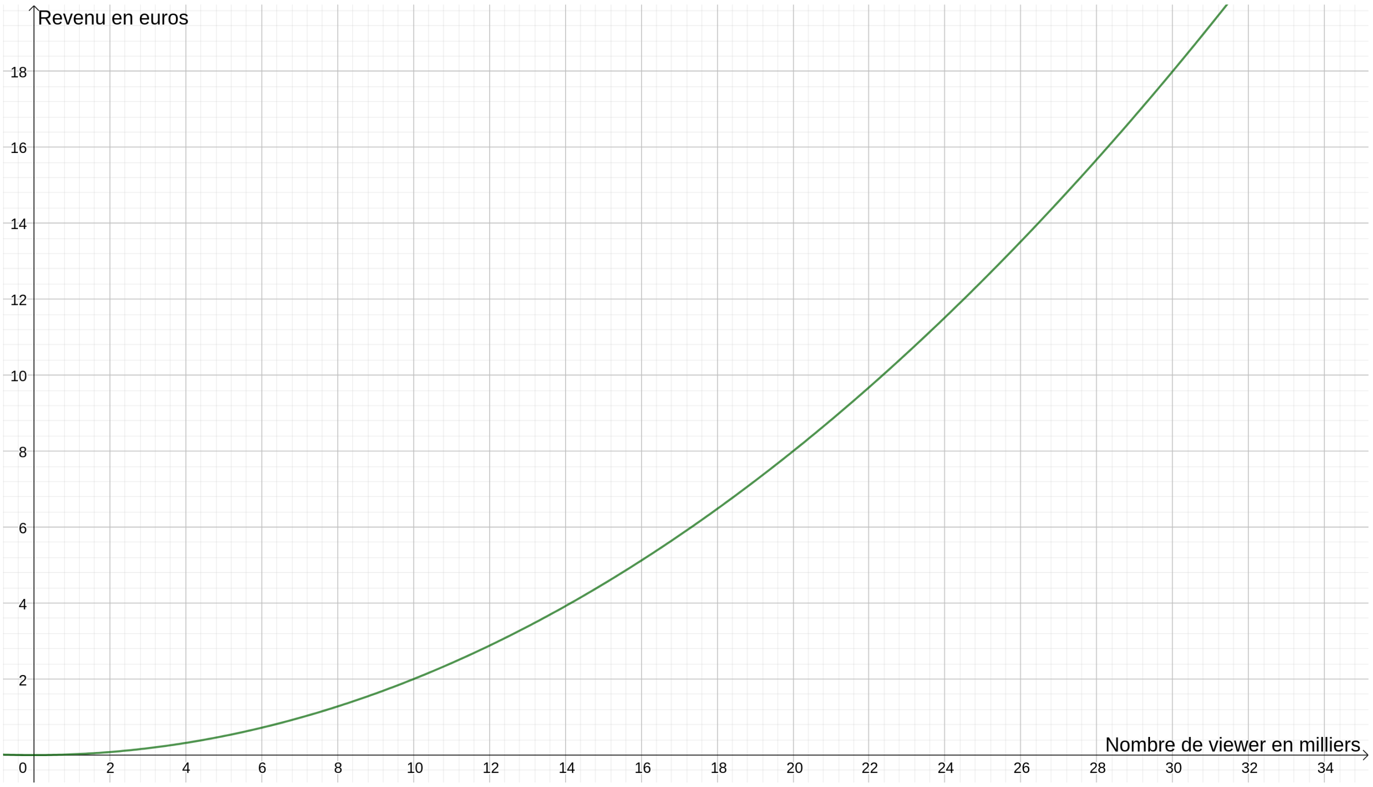
2. $h(-3) = -4$ et $h(4) = -4$

3. $g(2) = -1$

19.2 Applications

19.2.1 Lecture graphique

Voici un graphique représentant une fonction modélisant les revenus d'une vidéo en fonction du nombre de viewers.



Dans ce cas on peut définir cette par $f : x \mapsto f(x)$ où x représente le nombre de viewers et $f(x)$ les revenus générés.

Exercice 19.3 Donner une interprétation (phrase en francais tenant compte du contexte de l'exercice) des expressions mathématiques.

- $f(7)$:

- L'image de 16 est 5.16 :

- L'antécédent de 14.04 est 26.5 :

Exercice 19.4 A l'aide du graphique précédent, déterminer :
- Le nombre de viewers nécessaire pour générer un revenu de 10 euros.

- Les revenus générés par 22 500 viewers.

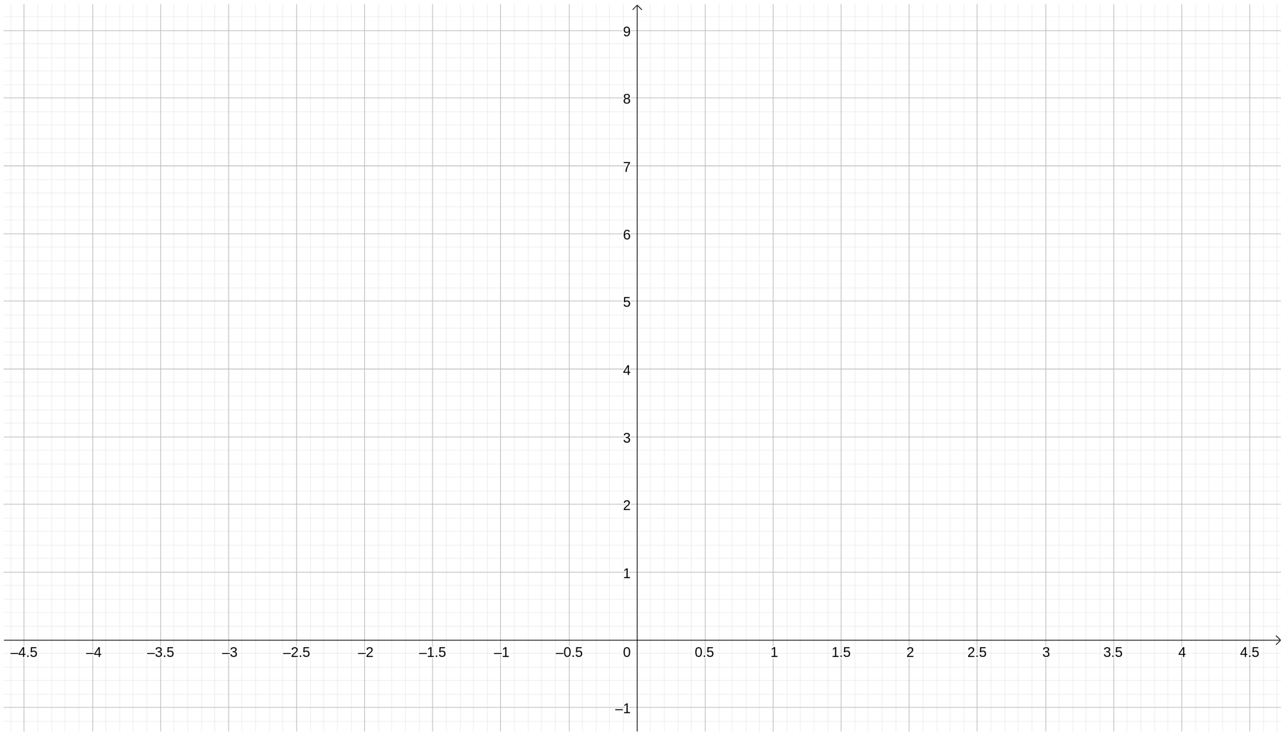
19.2.2 Contruire un graphique

Afin de construire la réprésentation graphique d'une fonction on suit les étapes suivantes :
- Construction ou remplissage d'un tableau de valeurs
- Placement des points dans un repère
- On relie enfin les points placés pour construire la représentaion de la fonction.

A vous de jouer !

Exercice 19.5 A l'aide du tableau de de valeurs et du repère suivants, construire la représentaion de la fonction $f : x \mapsto 0,5x^2 + 4$

x	-4	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3	4
$f(x)$											



Exercice 19.6 On considère la fonction h qui, à un nombre t, fait correspondre le nombre $-5t^2+20t$. Lors d'un dégagement par un gardien de but, si t est le temps écoulé depuis le tir, exprimé en secondes, $h(t)$ est la hauteur en mètres du ballon au dessus du sol, t secondes après le tir.

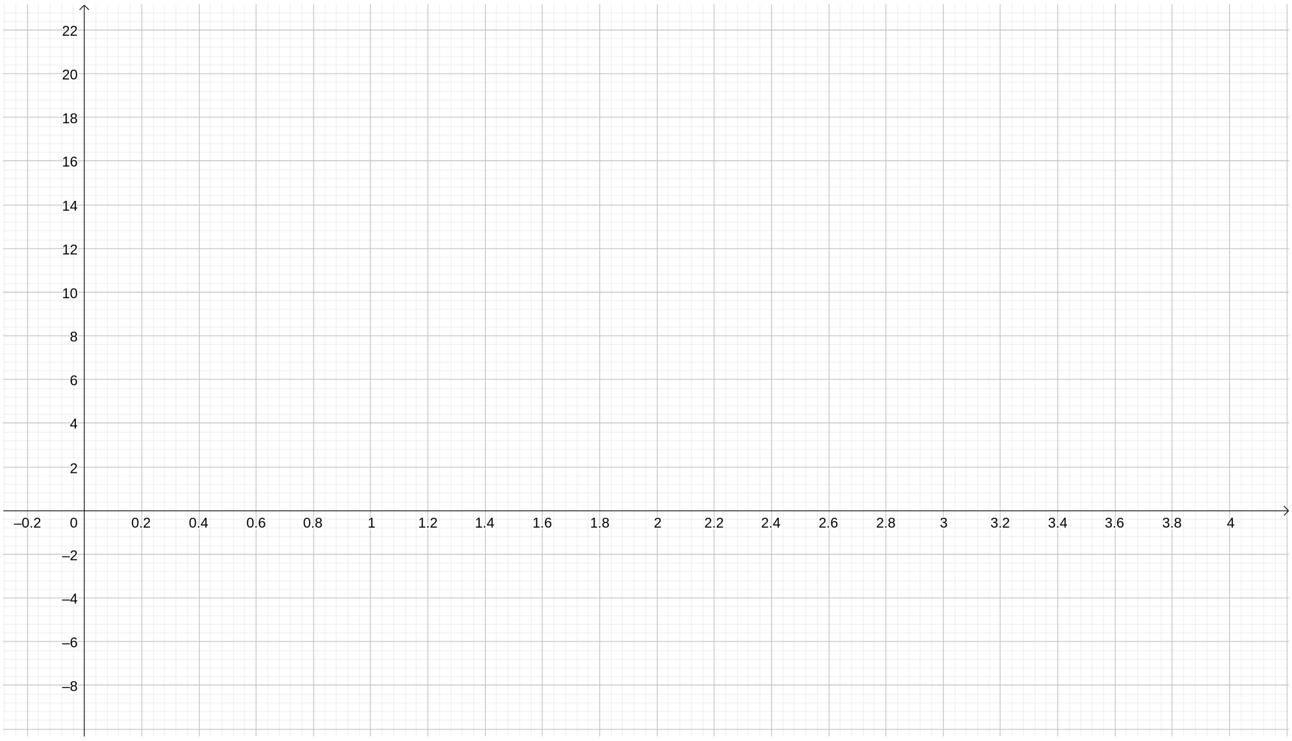
1. À quelle hauteur est le ballon au bout d'une seconde ? Et au bout de deux secondes ?

2. Calculer $h(4)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

3. Compléter le tableau de valeurs suivant

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$h(x)$									

4. Tracer le représentation graphique de la fonction h.



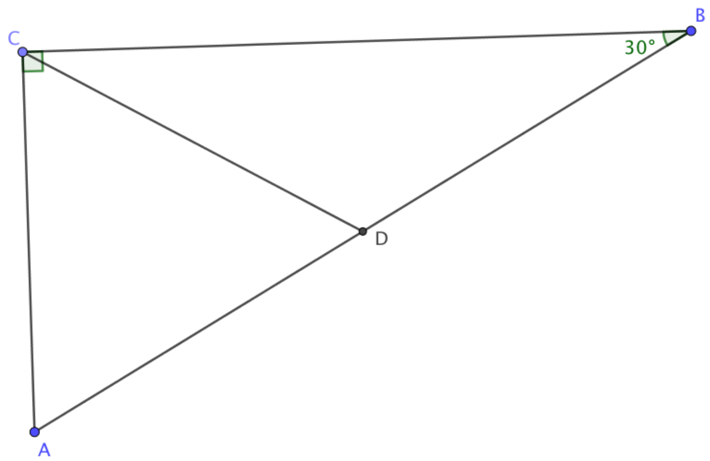
5. Déterminer graphiquement la hauteur maximale de la balle et le temps écoulé pour atteindre cette hauteur.

20. Transition 3-2 : Géométrie plane

Propriétés clefs :

- Tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont l'hypoténuse est le diamètre.
- La somme des angles d'un triangle est égale à 180°
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Exercice 20.1 Soit ABC un triangle rectangle et D le milieu de $[BC]$.



1. Démonter que les triangles ACD et CBD sont isocèles.

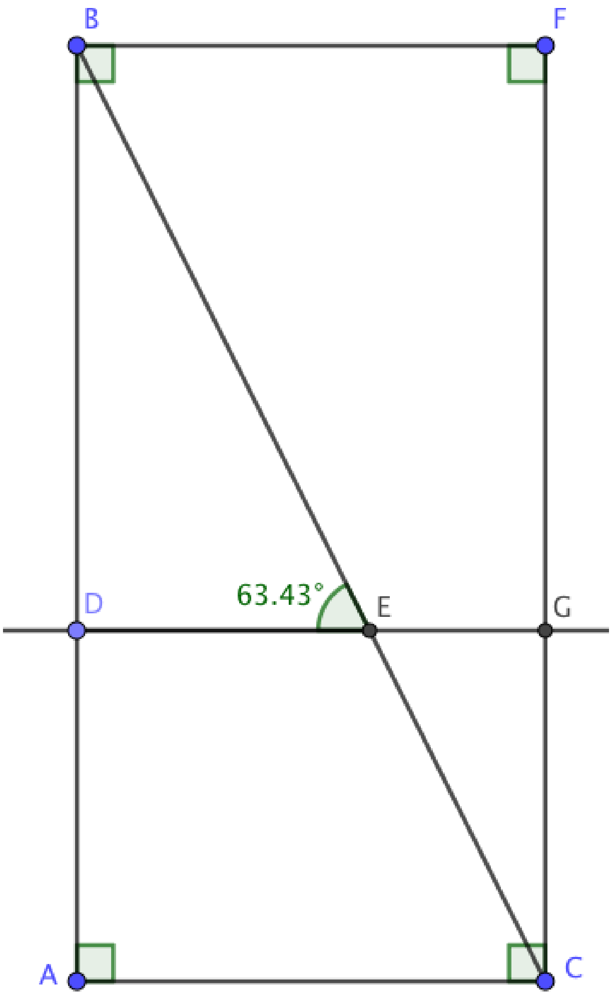
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{CDB}$

3. Déterminer de deux façons différentes la valeur de l'angle $\widehat{ADC}$

Propriétés clefs :

- Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- La somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux.
- Soit deux droites parralèles coupées par une troisième alors les angles correspondants sont égaux.

Exercice 20.2 On considère la figure ci-dessous.



On sait que $(DG) \mathbin{/\!/} (AC)$ et que E est le point d'intersection des droites (BC) et (DG)

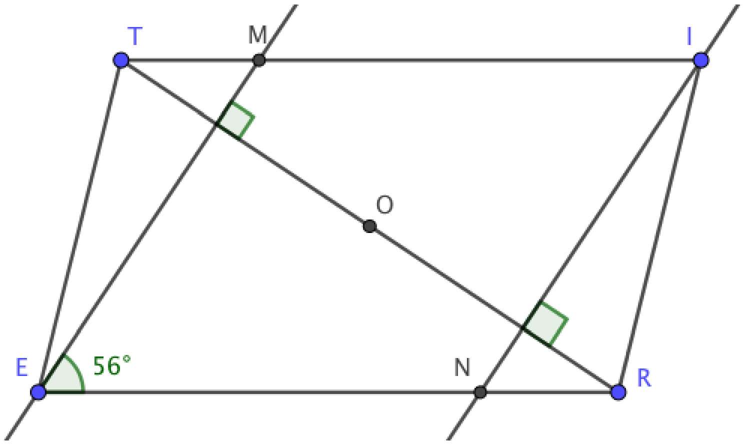
1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$

2. Déterminer de deux manières différentes la mesures de l'angle $\widehat{DEC}$

3. Déterminer la mesure l'angle $\widehat{ABC}$

4. Déterminer de deux manières différentes la valeur de l'angle $\widehat{CEG}$

Exercice 20.3 Dans la figure ci-dessous, TIRE est un parallélogramme dont le centre est O. M et N appartiennent respectivement à $[TI]$ et $[ER]$.



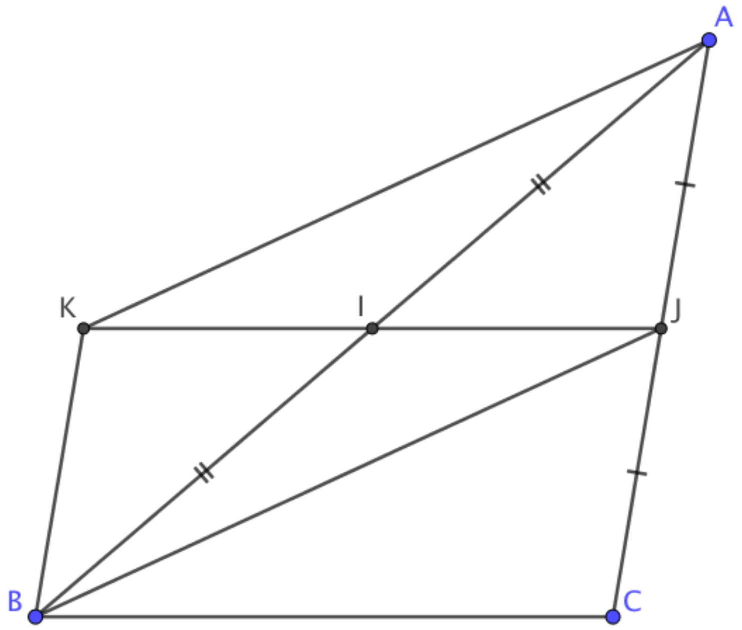
1. Montrer que (ME) et (NI) sont parallèles.

2. Déterminer la nature de $MINE$.

3. Que peut-on dire de O par rapport au segment $[MN]$?

4. Déterminer la valeur de $\widehat{EMI}$.

Exercice 20.4 Soit un triangle ABC ainsi que I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Le but de cet exercice est de montrer que (IJ) est toujours parallèle à (BC).



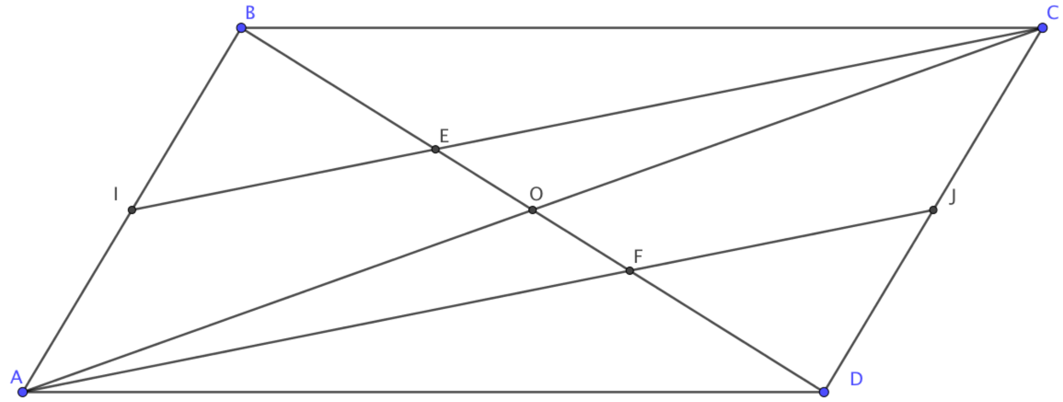
1. Appelons K le symétrique de J par rapport à I. Montrer que $AJBK$ est un parallélogramme.

2. Montrer que : $AJ = KB$ puis $KB = JC$.

3. Montrer que $KJCB$ est un parallélogramme.

4. En déduire que (IJ) est parallèle à (BC).

Exercice 20.5 Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Soit E le point d'intersection de $[BD]$ et $[IC]$ et F le point d'intersection de $[BD]$ et $[AJ]$.



1. Démontrer que $AICJ$ est un parallélogramme.

2. Démontrer que E est le milieu de $[BF]$.

3. Démontrer que $DF = FE = EB$.